Überbuchungsprobleme

Darum geht es
Entscheidungen in Abhängigkeit von Parametern optimieren - Gewinnoptimierung

Lernvoraussetzungen
Blatt A (ab Klasse 7): Wahrscheinlichkeitsbegriff, Grundkenntnisse zu Simulationen
Blatt B (ab Klasse 11/12): Binomialverteilung, Erwartungswert

Idee/Vorgehen
Das Verkaufen nicht vorhandener Plätze ist in der Touristik ein verbreitetes Phänomen. Mit der Binomialverteilung kommt man ihm im **Blatt B** analytisch auf die Schliche. GeoGebra erweist sich als nützliches Modellierungswerkzeug, bei dessen Anwendung abiturrelevantes Wissen erworben bzw. aktiviert und geübt wird.
Blatt A nähert sich der Thematik mit händischen und digitalen Simulationen - und sorgt schon in der SI für spannende Unterrichtsstunden... In der SII eröffnet es einen motivierenden Einstieg in die Thematik bzw. es ermöglicht - wenn man es arbeitsteilig zu Blatt B einsetzt - leistungsheterogene Binnendifferenzierung.

Lösungen ausgewählter Aufgabenteile
Blatt A
d) und f) Wenn man 10 Tickets verkauft, wird der Gewinn mit 8,0404 Silberlingen maximal, vgl. linke Tabelle.

	A	B	C
1	show	0.6667	
2	Erstattung	2	
3	verkauft	erwartete Erstattung	erwarteter Gewinn
4	6	0	6
5	7	0.1171	6.8829
6	8	0.4682	7.5318
7	9	1.0925	7.9075
8	10	1.9596	8.0404
9	11	3.0088	7.9912
10	12	4.1793	7.8207
11	13	5.424	7.576
12	14	6.7112	7.2888

	A	B	C
1	show	0.5	
2	Erstattung	3	
3	verkauft	erwartete Erstattung	erwarteter Gewinn
4	6	0	6
5	7	0.0234	6.9766
6	8	0.1172	7.8828
7	9	0.334	8.666
8	10	0.7148	9.2852
9	11	1.2803	9.7197
10	12	2.0303	9.9697
11	13	2.9495	10.0505
12	14	4.0137	9.9863

g) Der Gewinn wird beim Verkaufen von 13 Tickets mit 10,0505 Silberlingen maximal, vgl. rechte Tabelle.

Blatt B
d) Wenn man 72 Tickets verkauft, wird der Gewinn mit 69,775 Zaster maximal.
e) Wenn man den Fahrpreis zurückzahlt und noch 100 Zaster zusätzlich, dann werden die Einnahmen beim Verkauf von 66 Tickets maximal.
f) f(x) = x - (show*x - n)*Erstattung, hier also
$f(x) = x – (0,9x – 60)*5 = 300-3,5x$
$g(x) = x$

Erweiterung
Wer beim Thema „Überbuchung“ zwecks Prüfungsvorbereitung eine Brücke zu Signifikanztests schlagen möchte, nutze folgende Aufgabe.

Ein Unternehmen, das Fahrten mit einem Zeppelin organisiert, bietet für 60 Plätze 64 Tickets an, weil **erfahrungsgemäß nur 90%** (show-Quote p=0,9) der Ticketbesitzer erscheinen. Das Unternehmen **vermutet**, dass nach Änderung des Buchungsverfahrens die show-Quote p gesunken ist.
Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Tickets verkauft werden, soll die **Nullhypothese** „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Ticketbesitzer zur Fahrt erscheint, beträgt **mindestens 90 %**“, mithilfe einer Stichprobe von **200** Personen mit Reservierung auf einem **Signifikanzniveau von 5 %** getestet werden.
Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der Reservierungen nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese abgelehnt werden musste.

- Ermitteln Sie für den beschriebenen Test die zugehörige Entscheidungsregel.
- Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Man lehnt H_0: $p \geq 0,9$ nur dann ab, wenn 172 oder weniger Ticketbesitzer erscheinen. Man möchte das Abweisen (und Entschädigen) von Ticketbesitzern vermeiden

Hinweis:
Diese Standardaufgabe ist natürlich noch realitätsferner als die Binmoialverteilungsannahme: Kein an wirtschaftlichem Erfolg orientiertes Unternehmen käme im Überbuchungskontext auf die Idee, Signifikanztests zu bemühen. Und wenn man das mit emanzipatorischen Hintergedanken in einer moderierten Diskussion kritisch herausstellt sorgt man für Distanz zu unreflektierter Anwendung von Signifikanztests.

Mehr Tickets als Plätze: das Überbuchen (Simulation) A

Darum geht es

Gewinnerwartungen durch Simulationen optimieren

Ballonfahrt

Ivan ist Ballonfahrer. Er hat in seinem Ballon 6 Plätze, die lange vor dem Start gebucht und bezahlt werden. Da ein Ticket einen Silberling kostet und stets alle Plätze ausgebucht sind, nimmt Ivan bei jeder Fahrt 6 Silberlinge ein. Bei günstigen Wetterbedingungen werden die Kunden kurzfristig benachrichtigt. Da sie aber unabhängig voneinander die Fahrt nur mit Wahrscheinlichkeit p=2/3 antreten, fährt Ivan für die 6 Silberlinge durchschnittlich nur mit 4 Passagieren.

Er beschließt daher, stets 9 Tickets zu verkaufen, so dass er stets 9 Silberlinge einnimmt und im Schnitt mit einem voll besetzten Ballon starten kann. Sollten wider Erwarten mehr als 6 Personen mitfahren wollen, erhalten die abgewiesenen ihren Fahrpreis zurück und nochmal einen Silberling als Entschädigung dazu.

Spekulieren

a) Begründe, dass Ivan bei jeder Fahrt zwischen 3 und 9 Silberlinge verdient.
b) Max: „Ivans neue Geschäftsmodell bringt nichts, weil das Mittel von 3 und 9 doch wieder 6 ist. Ivans Verdienst wird sich im Schnitt nicht erhöhen.“ Hannah ist sich da nicht so sicher.
Beratet gemeinsam, was ihr von Ivans neuen Geschäftsmodell haltet. Stimmt ab.

Händisch simulieren

c) Jeder simuliert mehrmals das Einsteigen bzw. das Nichterscheinen der 9 Ticketbesitzer durch neunmaliges Würfeln. Die Augenzahlen 1 und 2 bedeuten: Der Kunde kommt nicht (N=Niete). Die Augenzahlen zwischen 3 und 6 bedeuten: der Kunde tritt die Fahrt an (T=Treffer). Protokolliert im Heft wie folgt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Kunden	zu viel	Einnahmen	Einnahmen						
T	T	N	T	N	N	T	T	N	5	0	9	3	4	5	6	7	8	9
N	T	T	T	T	T	T	T	N	7	1	7	|				|		|
T	T	T	T	T	T	T	T	T	9	3	3							

d) Fasst eure Ergebnisse in einer gemeinsamen Tabelle „Einnahmen“ zusammen und ermittelt, den durchschnittlichen Gewinn bei Ivans neuem Geschäftsmodell. Vergleicht mit eurer Abstimmung aus b).

Mit einer Computersimulation Ivans Geschäftsmodell optimieren

e) Erklärt einander,
- wie die nebenstehende Computersimulation ballonfahrt-simulation.ggb von Ivans Geschäftsmodell zu lesen ist
- welche Bedeutung die folgenden Befehle haben und wo sie stehen könnten
  =Wenn(Zufallszahl()<B1,1,0)
  =Wenn(J4<=6,0,J4-6)
  =9+B2*J4
  =Mittelwert(L4:L203)

K4 =Wenn(J4 > 6, J4 - 6, 0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p->	0.67									μ^->	8.2
2	a->	-2									σ^->	1.33
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9		zu viel	Gewinn
4	1	1	0	1	1	1	0	1	1	7	1	7
5	0	1	1	1	1	1	0	0	1	6	0	9
6	1	0	1	1	1	1	1	0	1	6	0	9
7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	7	1	7
8	1	1	1	1	0	1	0	0	1	6	0	9
9	1	1	1	1	0	0	0	1	1	6	0	9
10	1	0	1	1	1	1	1	1	1	8	2	5
11	1	1	0	0	1	1	0	1	0	5	0	9
12	1	0	1	1	0	0	1	1	0	5	0	9
13	0	0	1	1	0	1	1	1	1	6	0	9

f) Untersucht mithilfe der Computersimulation, wie sich Ivans Einnahmen bei der angegebenen Entschädigung in Zelle B2 (Rückzahlung von 2 Silberlingen) ändern würden, wenn Ivan 7, 8, 10 oder 11 Plätze in seinem Ballon verkaufen würde.
g) Abgewiesene Kunden fordern eine höhere Entschädigung:
Den Fahrpreis zurück und zusätzlich zwei weitere Silberlinge. Sucht mithilfe der Simulation nach einem Geschäftsmodell, das das Ivan maximale Einnahmen garantiert, wenn statt 2/3 nur ½ der Ticketbesitzer die Ballonfahrt antritt.

Mehr Tickets als Plätze: das Überbuchen (Theorie) B

Darum geht es

Gewinnerwartungen im Binomialverteilungsmodell optimieren

Ein Ticket in einem stets ausgebuchten Ausflugsdampfer mit 60 Plätzen kostet einen Zaster. Da nur 90% der Ticketbesitzer tatsächlich zum Fahrtantritt erscheinen (Show-Quote p=0,9) werden immer 64 Tickets verkauft, also stets 64 Zaster eingenommen. Sollten tatsächlich zufällig mehr als 60 Ticketbesitzer die Fahrt antreten wollen, so erhalten diejenigen, die nicht mitfahren können, ihren Fahrpreis zurück - und dazu noch das Vierfache des Fahrpreises als Entschädigung. Es werden als Erstattung also jeweils 5 Zaster zurückgezahlt.

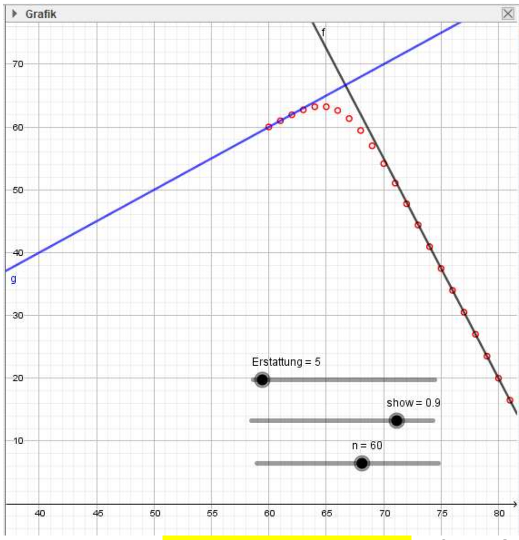
a) Nehmen Sie für folgende Rechnungen an, dass die Anzahl der zum Fahrtantritt erscheinenden Ticketbesitzer B(64;0,9) binomialverteilt ist mit p=0,9. Prüfen Sie durch eine Kontrollrechnung, dass man bei 64 verkauften Tickets (nach Abzug der Erstattungen) mit 63,22 Zaster tatsächlich mehr Einnahmen erwarten darf, als wenn man nur 60 Tickets verkaufen würde.

b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Gewinnerwartung im Falle von 62, 63, …, 66 verkauften Tickets.

c) Automatisieren Sie Rechnungen durch programmieren einer GeoGebra Datei wie in Bild 1, bei der man die show-Quote p und die Erstattung variieren kann.
Deuten und nutzen Sie dabei den in Zelle B8 sichtbaren Befehl.

d) Welche Überbuchung sollte man – bei gleichen Rückerstattungsmodalitäten empfehlen, wenn nur p = 80 % der Ticketbesitzer erscheinen (Show-Quote p = 0,8)?

e) Bestimmen Sie umgekehrt die Höhe der Erstattung, die bei der Show-Quote p = 0,8 beim Verkauf von 66 Tickets einen maximalen Gewinn garantiert.



Tabelle

B8 =Summe(Folge((i - n) B$2 Binomial(A8, B$1, i, false), i, n, A8))

	A	B	C	D
1	show	0.9		
2	Erstattung	5		
3	verkauft	erwartete Erstattung	erwarteter Gewinn	
4	60	0	60	
5	61	0	61	
6	62	0.1	61.9	
7	63	0.3	62.7	
8	64	0.8	63.2	
9	65	1.8	63.2	
10	66	3.4	62.6	
11	67	5.7	61.3	
12	68	8.6	59.4	
13	69	12	57	
14	70	15.8	54.2	
15	71	19.9	51.1	
16	72	24.2	47.8	
17	73	28.6	44.4	
18	74	33	41	
19	75	37.5	37.5	
20	76	42	34	
21	77	46.5	30.5	
22	78	51	27	

Bild 1: Die Datei überbuchungsrechner.ggb liefert in Spalte C die Gewinnerwartung in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Tickets (Spalte A). Nutzen Sie diese Datei, wenn Sie in c) nicht selber programmieren wollen – oder zur Ergebniskontrolle

f) Der Graph scheint lineare Asymptoten zu haben. Begründen Sie! Bestimmen Sie die zugehörigen linearen Terme.

g) Sammeln Sie Argumente, dafür, dass die Binomialverteilung in der Praxis möglicherweise kein sonderlich realistisches Modell für die Anzahl der erscheinenden Ticketbesitzer darstellt.