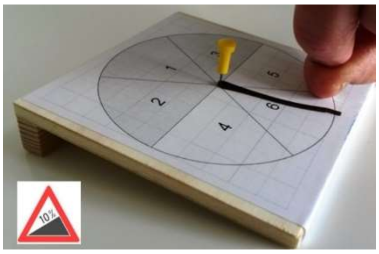
# Die Wahrscheinlichkeitsdichte beim schiefen Glücksrad physikalisch begründen



## Reibungsenergie geht verloren

Wenn ein Massenpunkt (hier der Schwerpunkt des Zeigers), auf einer *horizontalen* Fläche rutscht, ist die Reibung proportional zum Gewicht G. Die Proportionalitätskonstante $\rho$ gibt an, wieviel % des Gewichts als Bremskraft wirken.
Beim Rutschen auf einer *schiefen* Ebene zählt aber nicht das ganze Gewicht G, sondern nur die Komponente $G_{\perp} = G \cdot \cos(\alpha)$, die senkrecht auf die Ebene drückt (Bild 1). Die Reibung, die den Zeiger, bremst ist damit $\rho \cdot G \cdot \cos(\alpha)$.
Die durch Reibung verlorene Bewegungsenergie berechnet sich als Produkt Bremskraft · Weg.
Der Zeiger verliert damit bei jeder Halbumdrehung bergauf und bergab durch Reibung gleichviel Energie $E_{\uparrow} = E_{\downarrow} = G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi$ und beim Überstreichen aller Felder während jeder Vollumdrehung: $E_o = G \cdot \cos(\alpha) \cdot 2\pi$.

In der *letzten* - entscheidenden - Runde hat der Zeiger daher im Start ($\phi = 0$) eine Bewegungsenergie $E_{kin}$ mit $0 < E_{kin} \leq E_o$. Hätte er mehr Energie, würde sie ja eine weitere Runde beginnen.

*Wir nehmen nun an, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der der Zeiger in einem Feld stehen bleibt, proportional ist zu dem Anteil (an $E_o$) der Bewegungsenergie, die in diesem Feld abhandenkommt.*

## Lageenergie kommt zurück

Im der bergauf-Hälfte kommt aber durch das Ansteigen und die damit einhergehende Umwandlung in Lageenergie noch mehr Bewegungsenergie abhanden als nur durch die Reibung.
Der Zeiger hat oben bei $\varphi = \pi$ die Höhe $h = 2 \cdot \sin(\alpha)$, also die Lageenergie $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot G$.
(auch hier berechnet sich die Energie als Produkt aus Gewichtskraft und zurückgelegtem Weg (=Höhe)
Deswegen verringert sich die Bewegungsenergie
– bergauf um $G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi + 2G \cdot sin(\alpha)$ und
– bergab um $G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi - 2G \cdot sin(\alpha)$.
In der bergab-Hälfte kommt die gespeicherte Lageenergie nämlich zurück, da sie nach dem Energieerhaltungssatz im Gegensatz zu Reibungsenergie nicht verloren geht

### Aufgaben

a) Begründen Sie hiermit durch eine Termumformung: Die Anteile an $E_o$ sind bergauf $\frac{1}{2} + \frac{k}{\pi}$ bergab $\frac{1}{2} - \frac{k}{\pi}$ mit $k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$.

b) Begründen Sie mithilfe von Bild 2 für ein beliebiges Intervall $0 < \varphi \leq x$:
Wenn der Massenpunkt den Bogen $0 < \varphi \leq x$ überstreicht, dann verringert sich seine Bewegungsenergie um $\rho \cdot G \cdot \cos(\alpha) \cdot x + G \cdot (1 - \cos(x)) \cdot sin(\alpha)$. Kontrollieren Sie für $x = \pi$ und $x = 2\pi$.

c) Begründen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger im Bogen $0 < \varphi \leq x$ stehen bleibt, ist $F(x) = P(\varphi \leq x) = \frac{1}{2\pi}(x + k(1 - \cos(x)))$. Kontrollieren Sie: für $x = \pi$ ergibt sich der Wert aus a).

d) Begründen Sie mit c) den Term der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + k \sin(x))$ mit $k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$.

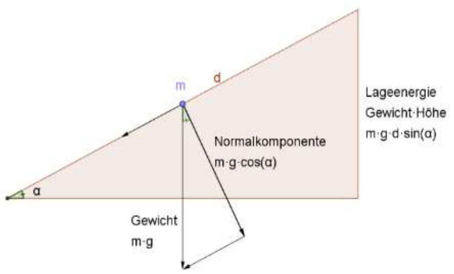



Bild 1: schiefes Glücksrad von der Seite.
Die Hypotenuse des Steigungsdreiecks ist der Durchmesser des Einheitskreises. Es gilt d = 2.

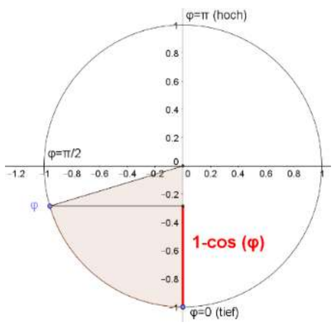



Bild 2: schiefes Glücksrad von oben gesehen