

Vektoren erklären, warum Brücken Parabeln sind

Nicht nur Verschiebungen, sondern auch Kräfte lassen sich durch Vektoren beschreiben. Man kann sie addieren, in Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegen und man kann mit Vektorrechnung begründen, dass Hängebrücken parabelförmig sein müssen.



Bei Hängebrücken hängen die Vertikalseile im gleichen Abstand nebeneinander, weil die Fahrbahn überall gleich schwer ist.

Im Brückenmodell aus Fig. 1 haben sie den Abstand 1 (in dm) und sie tragen alle die gleiche Last $g = 0,2$ (in kg), die in jedem Knoten durch den Vektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ dargestellt wird, der nach unten zeigt. Wenn die Brücke stabil sein soll, muss diese Last in jedem der Punkte P durch die vektorielle Summe zweier Gegenkräfte $\vec{r}$ (zieht nach rechts) und $\vec{l}$ (zieht nach links) kompensiert werden. Die vektorielle Summe aller Kräfte muss den Nullvektor ergeben: $\vec{l} + \vec{r} + \vec{g} = \vec{0}$. Dabei ist die Richtung der Kräfte $\vec{r}$ und $\vec{l}$ durch die Steigung der Tragseile bestimmt.

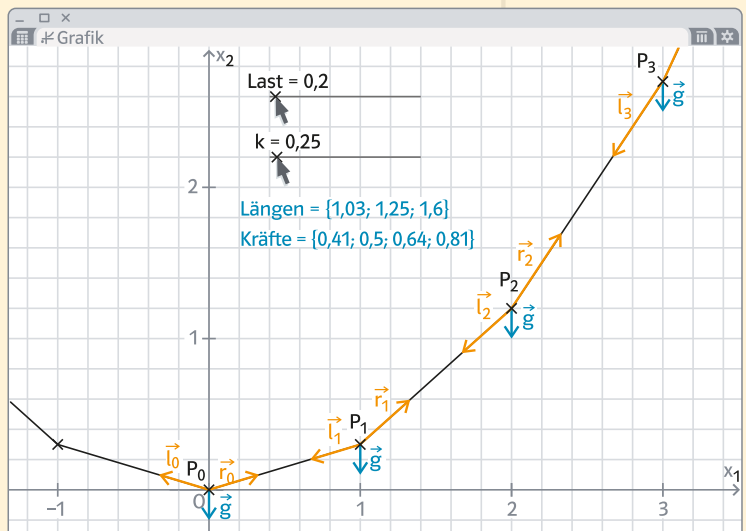


Fig. 1

- 1 a) Sari: „Wenn der erste Seilabschnitt rechts der Brückenmitte P_0 die Steigung k hat, dann zeigt $\vec{r}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix}$ exakt in Seilrichtung und kompensiert zusammen mit dem entsprechenden Vektor $\vec{l}_0$ die in P_0 hängende Last.“
Kontrollieren Sie Saris Aussage durch eine Rechnung. Berechnen Sie anschließend die Koordinaten von P_1 .
- b) Nora: „Wenn in P_1 die Kräfte $\vec{l}_1 = -\vec{r}_0$ und $\vec{g}$ nach unten ziehen, werden sie durch $\vec{r}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix}$ kompensiert. Die Steigung des zweiten Seilabschnitts muss dann $3k$ sein und der zweite Seilknoten muss folglich die Koordinaten $P_2(2|4k)$ haben.“
Prüfen Sie Noras Gedanken durch eine Rechnung.

13 interaktive Anwendung
Brückenmodell



- c) Aylin: „Vermutlich gilt dann $\vec{r}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{g}{k} \\ 5g \end{pmatrix}$, die Steigung ist $5k$, man erhält $P_3(3|9k)$ und alle Seilknoten liegen tatsächlich auf der Parabel mit $f(x) = kx^2$.“
Überprüfen Sie die Aussage von Aylin.

- d) Max: „Ich denke viel einfacher: Der Knoten P_n an der Stelle n muss das Gewicht von n links liegenden Knoten tragen und zusätzlich ein halbes von P_0 also $\frac{1}{2}(2n+1)g$.

Die Horizontalkraft $\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{k}$ ist in allen Knoten gleich. Deswegen gilt $\vec{r}_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{g}{k} \\ (2n+1)g \end{pmatrix}$ und

die Steigung rechts von P_n ist $m_n = 2k \cdot n + k$. Das ist genauso wie bei der Parabel P mit $f(x) = kx^2$ zwischen den Stellen n und $n+1$. Deswegen liegen alle Knoten auf P .

Erläutern Sie Max' Gedanken und prüfen Sie seine Aussage zur Parabel rechnerisch.

2 Experiment

- a) Bauen Sie mithilfe einer Wäscheleine, die an zwei Nägeln über den Stellen -4 und $+4$ (in dm) fixiert ist, eine „Hängebrücke“, die 7 Schokoladentafeln (à 100 g) genau über den Stellen $-3, -2, \dots, 6$ trägt und durch $f(x) = kx^2$ beschrieben wird. Der Parameter k soll dabei den Wert $0,2; 0,4$ oder $0,6$ haben. Gehen Sie arbeitsteilig vor.
Berechnen Sie dazu die Längen der 8 Seilabschnitte die Sie durch Sicherheitsnadeln (zum Anhängen der Tafeln) voneinander abtrennen oder fädeln Sie Zwirn oder eine Angelschnur durch die entsprechenden Ösen einer dünnen Kette.
- b) Tabellieren Sie, wie die Zugkraft am Rand von dem Parameter k abhängt.



Statt Sicherheitsnadeln an den zuvor über Parabelsekanten berechneten Positionen einer Wäscheleine zu fixieren, wurden hier Zwirnfäden durch die Ösen einer dünnen Kette gefädelt.