

Wahrscheinlichkeiten auf Gleichheit prüfen

Wenn man testen möchte, ob eine Wahrscheinlichkeit die Realität gut beschreibt, nutzt man die „Zipfel“ der Binomialverteilung zur Bestimmung des Ablehnungsbereichs der Nullhypothese $H_0: p = p_0$. Mit dieser Idee kann man auch zwei Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 , deren Größe man aber nicht kennt, auf Gleichheit testen. In Fig. 1 geht es z.B. um die Prüfung, ob ein Medikament (Med) und ein Placebo (Pla) mit der gleichen (unbekannten) Wahrscheinlichkeit wirken.

Der nahe liegende „Holzweg“: In der Studie wurde 400 von 600 Personen ein echtes Medikament verabreicht, 200 Personen erhielten ein Placebo. + steht für Treffer (hat gewirkt), – für Niete (nicht gewirkt). Wenn Placebo und Medikament mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wirken würden, dann wären in der Medikamentengruppe doppelt so viele Treffer wie in der Placebo-Gruppe zu erwarten, weil sie doppelt so groß ist. Es scheint daher nahe liegend, die Hypothese $H_0: p = \frac{2}{3}$ bei einem Stichprobenumfang 264 mit der Binomialverteilung zweiseitig zu testen.

- 1 Prüfen Sie, dass sich beim Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ der Ablehnungsbereich $[0; 160] \cup [192; 264]$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $4,3\% < \alpha$ ergibt.

Da das Medikament in der Medikamentengruppe nur bei 189 Personen wirkte, und 189 noch nicht im Ablehnungsbereich liegt, kann man H_0 , also die Gleichheit der Wirkungswahrscheinlichkeiten von Medikament und Placebo, nicht ohne Weiteres verwerfen.

Fishers exakter Test: Leider hat der obige Gedankengang einen kleinen Haken: Die Durchführung der Studie lässt sich *nicht* als Folge von 264 unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit konstanter Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$ deuten, weil das Prüfen auf Wirkung dem Ziehen *ohne* Zurücklegen aus einem Gefäß mit $N = 600$ Kugeln entspricht, von denen $M = 400$ mit Medikament und $N - M = 200$ mit Placebo beschriftet sind. Die Anzahl k der „Medikament-Kugeln“ ist

dann **hypergeometrisch verteilt** mit $P(X = k) = H_{600; 400; 264}(k) = \frac{\binom{400}{k} \binom{200}{264-k}}{\binom{600}{264}} \approx B_{264; \frac{400}{600}}(k)$.

Die interaktive Anwendung Fishertest veranschaulicht diese Verteilung, die der Binomialverteilung recht ähnlich sieht. Sie berechnet für jede Trefferzahl k die Wahrscheinlichkeit „Irrtum“ noch extremerer Abweichungen in den beiden gelben „Zipfeln“. Für $k = 189$ ergibt sich mit 0,024 ein Wert unter 5% und damit gestatten die Daten aus Fig. 1 nun, die Hypothese der gleichen Wirksamkeit von Medikament und Placebo auf dem 5%-Signifikanzniveau zu verwerfen.

- 2 Nutzen Sie die interaktive Anwendung „Fishertest“, um $H_{N; M; n}(k)$ für verschiedene Parameter N , M und n mit $B_{n; p}(k)$ zu vergleichen. Dabei ist $p = \frac{M}{N}$ der Anteil der Treffer.
- 3 Überprüfen Sie mit der interaktiven Anwendung: Die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N , M und n unterscheidet sich kaum von der Binomialverteilung mit den Parametern n und $p = \frac{M}{N}$, wenn der Stichprobenumfang n klein ist im Vergleich zu N , M und $N - M$. Es gilt

dann $H_{N; M; n}(k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \approx B_{n; \frac{M}{N}}(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.

- 4 Prüfen Sie mit der interaktiven Anwendung „Fishertest“ ob man die Hypothese der Gleichheit der Trefferwahrscheinlichkeiten bei den angegebenen Versuchsergebnissen auf einem Signifikanzniveau von 5% verwerfen kann.
 - a) 12 Treffer in 25 und 45 Treffer in 75 Versuchen
 - b) 48 Treffer in 100 und 180 Treffer in 300 Versuchen

Wie man die Gleichheit zweier unbekannter Wahrscheinlichkeiten mit Konfidenzintervallen prüft, erforschen Sie in der Exkursion zu Kapitel VIII auf Seite 323.

	–	+	Summe
Pla	125	75	200
Med	46	189	400
	47	264	600

Fig. 1: Wirksamkeitsstudie

Die Durchführung der Studie lässt sich deuten als das 264-malige Ziehen von Kugeln, aus einer Urne mit $N = 600$ Kugeln, von denen $M = 400$ mit „Medikament“ und $N - M = 200$ mit „Placebo“ beschriftet sind. Zusätzlich trägt jede Kugel entweder ein + oder – als Aufdruck, wobei + bedeutet: „hat gewirkt“ und – „hat nicht gewirkt“. Gleiche Wirksamkeit von Placebo und Medikament entspräche dann gleichen Anteilen „+“ bei den Medikament- und den Placebo-Kugeln.

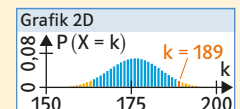


Fig. 2: $H_{600; 400; 264}(k)$ Irrtumswahrscheinlichkeit 0,102

137 **interaktive Anwendung**
Fishertest

