

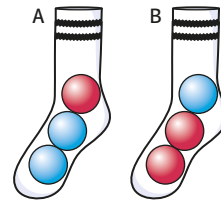
Mit einem einfachen Spiel die „Philosophie“ einseitiger Signifikanztests durchschauen

Hannah wählt zufällig eine der Socken A oder B. Flo muss tippen, welche Socke Hannah gezogen hat. Er muss sich für eines der „Modelle“ $p < \frac{1}{2}$ oder $p > \frac{1}{2}$ entscheiden. A steht für die Hypothese $p(\text{Treffer}) = \frac{1}{3}$, B für $p(\text{Treffer}) = \frac{2}{3}$ oder allgemeiner: A für $p < \frac{1}{2}$ und B für $p > \frac{1}{2}$.

Trefferwahrscheinlichkeiten:

Socke A: $p = \frac{1}{3}$

Socke B: $p = \frac{2}{3}$



Bevor Flo seinen Tipp abgibt, zieht Hannah $n = 11$ -mal mit Zurücklegen aus der gewählten Socke und nennt die Ergebnisse, z.B. T N N T N N T N T T N, kurz „ $\frac{5}{11}$ Treffer“.

Flo tippt nach dem „gesunden Menschenverstand“ bei $X \leq 5$ Treffern auf A und bei $X \geq 6$ Treffern auf B. Bei jedem richtigen Tipp erhält Flo einen Punkt. Falsche Tipps werden nach einer der folgenden Regeln bestraft:

- (1) symmetrisch: Jeder falsche Tipp kostet 2 Punkte.
- (2) asymmetrisch: Ein falscher Tipp auf A kostet 20, ein falscher auf B 2 Punkte.
- (3) asymmetrisch: Ein falscher Tipp auf A kostet 40, ein falscher auf B 2 Punkte.

1. Experiment

Versuchen Sie experimentell herauszufinden, ob Flo bei diesen Regeln auf lange Sicht gewinnen kann. Spielen Sie dazu 10-mal in Partnerarbeit. Halten Sie die Ergebnisse in einer gemeinsamen Tabelle fest.

Gruppe	richtige Tipps	falsch auf A getippt	falsch auf B getippt	Gewinn gemäß Regel		
				(1)	(2)	(3)
Mila	7	0	2	3	3	3
Jim	9	1	0	7	-11	-31
...						
Summe	16	1	2	10	-8	-28

2. Simulation

Nuri: „Flos Tippstrategie, bei der man bei weniger als der Hälfte Treffer auf A tippt, scheint für die asymmetrischen Bestrafungen (2) und (3) nicht optimal zu sein. Vielleicht sollte man bei (2) und (3) so tippen, dass der schlimme Fehler (falscher Tipp auf A) unwahrscheinlicher wird.“ Erläutern Sie, was Nuri meinen könnte. Schlagen Sie eine Tippstrategie vor, die möglicherweise mehr Gewinn (weniger Verlust) erwarten lässt. Erproben Sie Ihre Vorschläge mit der interaktiven Anwendung, bei der das Ansteigen und Abfallen des Punktestandes bei einer beliebig fortsetzbaren Folge von Spielen (je der Länge $n = 11$) kontinuierlich bilanziert wird.

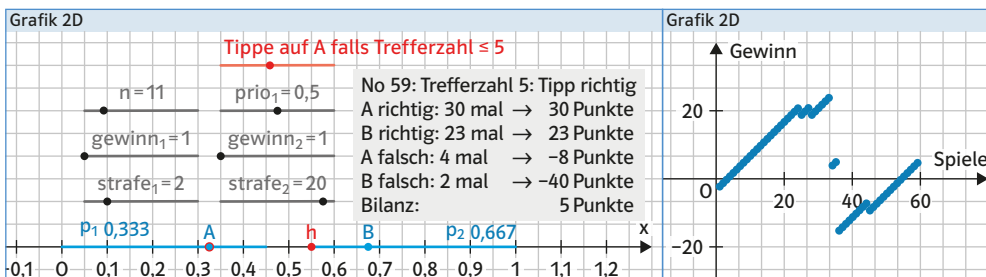


Fig. 1: Im 59. Spiel wurden 5 Treffer erzielt (roter Punkt bei $h = \frac{5}{11} = 0,45\dots$), der Tipp auf A (roter Kringel) war richtig, es wurde 1 Punkt hinzugewonnen.

133 interaktive Anwendung Chance-Risiko sequentiell

Lerneinheit 2
Seite 276
Lerneinheit 3
Seite 281

Hintergrund:
Bei einer anstehenden Investitionsentscheidung könnte Socke B für eine händische Produktion stehen, bei der deutlich **mehr als die Hälfte** der Werkstücke Mängel aufweist und zu preiswert verkauft werden muss. Socke A könnte für einen Roboter stehen, dessen Einsatz deutlich **weniger als 50%** fehlerhafte Werkstücke verspricht. Nach Prüfung von n Werkstücken ist zu entscheiden, ob man, langfristig auf Gewinn hoffend, auf A ($p < \frac{1}{2}$) setzen und die riskante möglicherweise ruinöse Investition wagen oder ob man doch eher vorsichtig bei der händischen Produktion ($p > \frac{1}{2}$) bleiben sollte.



3. Theorie

- a) Berechnen Sie mit dem nebenstehenden Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Flo mit der Strategie des gesunden Menschenverstandes (wenn $X \leq 5$, dann Tipp auf A) richtig tippt und auch den Erwartungswert des Gewinns für jede der Bewertungsregeln (1), (2) und (3). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Zeile 1 in der Tabelle in Fig. 2.

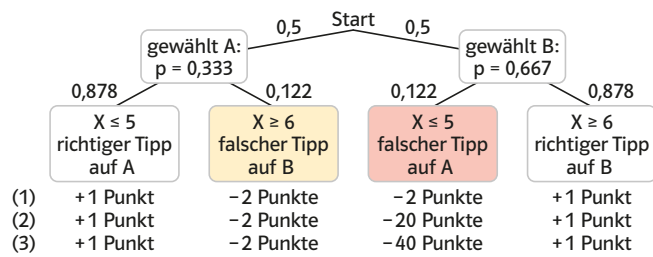


Fig. 1

- b) Nuri möchte die Wahrscheinlichkeit am „rui-nösen“ dritten Pfad des Baumdiagramms dadurch verkleinern, dass er im Zweifel lieber bei B bleibt und erst bei $X \leq 4$ oder sogar erst bei $X \leq 3$ auf A tippt. Zeichnen Sie dazu je ein neues Baumdiagramm. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten richtiger Tipps und die Gewinnerwartungen. Tragen Sie die Ergebnisse in eine Tabelle wie in Fig. 2 ein.
- c) Fassen Sie die Essenz der Berechnungen in einem prägnanten Kommentar zusammen.

Tippstrategie	Wahrscheinlichkeit für richtige Tipps	erwarteter Gewinn bei Regel		
		(1)	(2)	(3)
$X \leq 5$, dann A	87,971%	+0,63	-0,47	-1,69
$X \leq 4$, dann A				
$X \leq 3$, dann A				

Fig. 2

Gut zu wissen:

Im Alltag muss man sich oft zwischen Handlungsalternativen **entscheiden**, die mit der Einschätzung einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p verbunden sind: „Sollte man lieber auf die Hypothese A: $p < \frac{1}{2}$ oder doch auf B: $p > \frac{1}{2}$ setzen?“

Im Fall einer asymmetrischen Bewertung von Fehlentscheidungen bezeichnet man die Hypothese, deren fälschliches Verwerfen die schlimmeren Konsequenzen (die höheren Verluste) impliziert, als die **Nullhypothese H_0** . Den „schlimmen“ Fehler, dass man auf die Alternative H_1 setzt, obwohl H_0 gilt, bezeichnet man dann als **Fehler 1. Art**, den weniger schlimmen als **Fehler 2. Art**. Statistiker richten die Entscheidungsregel so ein, dass die Wahrscheinlichkeit des **Fehlers 1. Art** kleiner wird als ein vorgegebenes **Signifikanzniveau α** , meist 5%.

Bei den asymmetrischen Bewertungen (2) und (3) wird B: $p = \frac{2}{3}$ zur Nullhypothese. Der Fehler 1. Art findet sich am dritten Pfad des Baumdiagramms. Er sollte kleiner als das vorgegebene Signifikanzniveau α sein. Bei der symmetrischen Bewertung (1) wird die Frage nach der Nullhypothese sinnlos.

4. Die Parameter variieren

- a) Erforschen Sie mithilfe der interaktiven Anwendung, wie sich eine Vervielfachung des Versuchsumfangs auswirkt. Füllen Sie dazu erneut eine Tabelle wie Fig. 2 aus und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus 3. b).
- b) Erforschen Sie, wie groß der Versuchsumfang sein sollte, damit man auch dann noch einen Gewinn erwirtschaften kann, wenn man beim falschen Tipp auf A statt 40 nun 100 Punkte verliert. Notieren Sie, mit welcher Fehlerwahrscheinlichkeit (bzw. auf welchem Signifikanzniveau) Sie dann arbeiten.
- c) Chancen gegen Risiken abwägen: Erforschen Sie mithilfe der interaktiven Anwendung, wie sich die optimale Entscheidungsstrategie möglicherweise dadurch ändert, dass man den richtigen Tipp auf A doppelt (viermal ...) stärker belohnt als den richtigen Tipp auf B. Kann es sich lohnen, wegen der **Chance** auf höhere Einnahmen das **Risiko** der fatalen Fehlentscheidung in Kauf zu nehmen?

134 **interaktive Anwendung**
Chance-Risiko
funktional

