Warum der GTR zwei Standardabweichungen (StdevPop und StdevSamp) anbietet

Wenn man eine faire Münze zweimal wirft, ist die Trefferzahl („Kopf“) binomialverteilt mit n=2, p=1/2, μ=1 und $\sigma^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, das weiß man aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Andererseits weiß man, dass man die Parameter μ und σ² durch $\bar{x}$ und s² aus Stichproben schätzen kann (σ² nennt man theoretische, s² empirische Streuung.)

Wir betrachten im Folgenden Stichproben der Größe n=3, werfen also (mit Computerhilfe) dreimal zwei Münzen und erhalten Treffersummen der Form (2,1,2) (vgl. Fig. 1 A1:C1) mit

$\bar{x} = \frac{1}{3}(2+1+2) = \frac{5}{3} \approx 1{,}667$ und

$s^2 = stdevpop^2 = \frac{1}{3}((2-\frac{5}{3})^2 + (1-\frac{5}{3})^2 + (2-\frac{5}{3})^2) \approx 0{,}222$.

Statt die Abweichungsquadrate durch n=3 zu teilen, teilt der GTR auch durch n-1=2:

$s^{*2} = stdevsamp^2 = \frac{1}{2}((2-\frac{5}{3})^2 + (1-\frac{5}{3})^2 + (2-\frac{5}{3})^2) \approx 0{,}333$ dadurch erhöht sich der Wert für s² ein wenig.

Falls man, wie im Münzbeispiel den Erwartungswert μ=1 kennt, also nicht durch $\bar{x}$ schätzen muss, könnte man auch verwenden

$s^{**2} = \frac{1}{3}((2-\mu)^2 + (1-\mu)^2 + (2-\mu)^2) \approx 0{,}667$.

Die Ergebnisse dieser drei Rechnungen sind der ersten Zeile von Fig. 1 zu entnehmen.

	A wurf1	B wurf2	C wurf3	D mitel	E samp	F pop	G man	H msamp	I mpop	J mman	K	L
=	=randbin(2,0.5,100)	=randbin(2	=randbin(2									
1	2	1	2	1.667	0.333	0.222	0.667	0.52	0.347	0.5		
2	1	1	0	0.667	0.333	0.222	0.333					
3	2	0	1	1.	1.	0.667	0.667					
4	2	1	1	1.333	0.333	0.222	0.333					
5	1	1	2	1.333	0.333	0.222	0.333					
6	2	1	1	1.333	0.333	0.222	0.333					
7	1	1	1	1.	0.	0.	0.					
8	0	0	1	0.333	0.333	0.222	0.667					
9	2	2	0	1.333	1.333	0.889	1.					
10	1	1	0	0.667	0.333	0.222	0.333					
11	2	2	1	1.667	0.333	0.222	0.667					
12	1	1	0	0.667	0.333	0.222	0.333					
13	0	1	1	0.667	0.333	0.222	0.333					
14	1	2	2	1.667	0.333	0.222	0.667					
15	1	2	1	1.333	0.333	0.222	0.333					
16	1	0	0	0.333	0.333	0.222	0.667					
17	0	1	1	0.667	0.333	0.222	0.333					
18	1	1	1	1.	0.	0.	0.					
19	0	0	0	0.	0.	0.	1.					

G1 $=\mathrm{round}\left(\frac{\mathrm{sum}((a1{:}c1-1)^2)}{3},3\right)$

Das Ganze wird nun 100-mal wiederholt (vgl. Fig. 1 Zeilen 2 bis 100). Dann schwanken die Mittelwerte $\bar{x}$ um den Erwartungswert μ=1 und die empirischen Streuungen s, s* und s** sollten um den „theoretischen“ Wert σ^2 schwanken (bzw. in der Nähe von σ^2) liegen.

Das ist tatsächlich aber nur bei s^{*2} (stdevsamp²) und nicht bei s^2 (stdevpop²) der Fall, wie die Zellen H1 und I1 zeigen. In diesen Zellen wurden nämlich die Mittelwerte von s^{*2} bzw. s^2 aus den 100 Simulationen berechnet.
Auch s^{**2} schätzt die Streuung richtig, ist aber nur bei bekanntem Erwartungswert zu gebrauchen, also in der Praxis nutzlos.

Fazit: Wenn man die Streuung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aus einer kleinen Stichprobe (n=3 ist schon ziemlich klein) durch s^2=stdevpop² schätzt, erhält man prinzipiell einen zu kleinen Wert. Schätzt man durch s^{*2}=stdevsamp², stimmt die Schätzung im Mittel. Man sagt stdevsamp² ist erwartungstreu.

Das liegt anschaulich daran, dass die Abweichungsquadrate der drei Stichprobenwerte vom (für die Berechnung der theoretischen Streuung relevanten) Erwartungswert größer sind als von dem aus der Stichprobe geschätzten Mittelwert. Schließlich passt der Mittelwert ja besonders gut zur Stichprobe.

Eine kleine Begründung:
Wenn man **eine** Münze wirft kann man nur 0 oder 1 Treffer erhalten. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung hat die Parameter μ=1/2 und σ^2=1/4. Wirft man die Münze n=3 mal, gibt es 8 mögliche Stichproben, die in Fig. 2 in den Spalten A-C stehen.
Begründen Sie mit Hilfe der Tabelle aus Fig. 2, dass s^{*2} (Spalte E) und s^{**2} (Spalte G) erwartungstreu sind, nicht aber s^2 (Spalte F).

	A	B	C	D mittel	E ssamp	F spop	G sman	H	I	J	K	L
=												
1	0	0	0	0	0	0	1/4					
2	0	0	1	1/3	1/3	2/9	1/4					
3	0	1	0	1/3	1/3	2/9	1/4					
4	0	1	1	2/3	1/3	2/9	1/4					
5	1	0	0	1/3	1/3	2/9	1/4					
6	1	0	1	2/3	1/3	2/9	1/4					
7	1	1	0	2/3	1/3	2/9	1/4					
8	1	1	1	1	0	0	1/4					
9					1/4	1/6	1/4					
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												

F1 $= \frac{\text{sum}\left((\$a1:\$c1-\$d1)^2\right)}{3}$

Fig. 2