Warum Brücken so gerne Parabeln sind

Wie die Abbildungen zeigen, spielen beim Bau von Hänge- und Bogenbrücken Parabeln eine große Rolle.
Warum das so ist, können Sie mithilfe eines Experiments und einiger Aufgaben selbst entdecken.
Sie müssen nur Kräfte in Komponenten zerlegen und Vektoren addieren.

Fig. 1: Die Gleise liegen oberhalb des Gerüsts, in den Streben des Gerüstes wirken Druckkräfte.

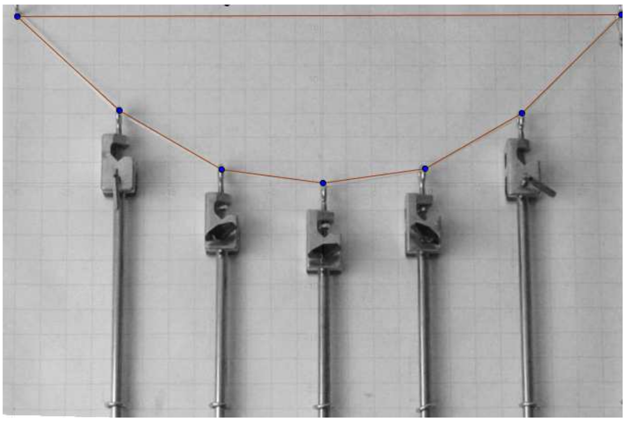

Fig. 2: Gleich große Gewichte g (hier Eisenstangen) hängen – durch Ösen geführt – in konstanten Horizontal-Abständen an einem Seil.

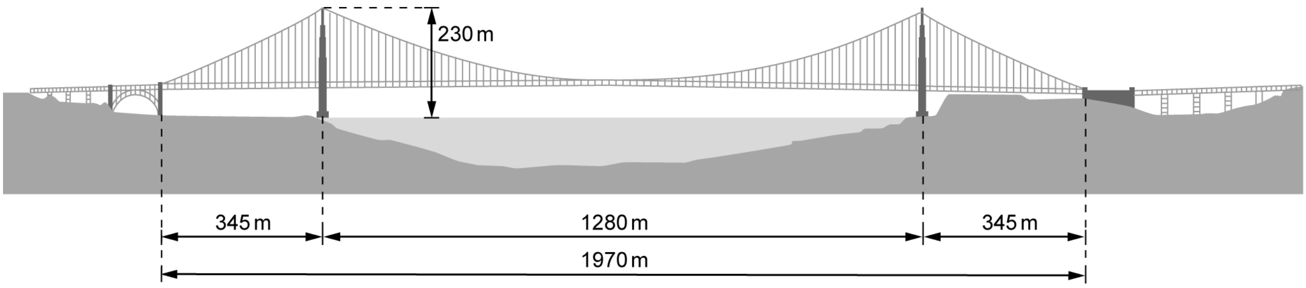

Fig. 3: Golden Gate Bridge, die Fahrbahn liegt unterhalb der Tragseile, in den Seilen wirken Zugkräfte.

Zur Einstimmung ein Gedankenexperiment, das mit Funktionen und sinnvollen Definitionsbereichen zu tun hat – und deutlich macht, dass man Polstellen in Funktionsgraphen im wahrsten Sinne des Wortes beim Ziehen an einem belasteten Seil auch „fühlen“ kann.

1 Erstmal nur ein Gewicht

Zwischen zwei (gleich hoch) eingeschraubten Haken im Abstand 2 wird ein Seil gespannt. In der Mitte hängt ein Gewicht $g = 1$ (Schokolade, 1 N oder Bierflasche, ca. 10 N ≈ 1 kg). Je weniger das Seil durchhängen (je kleiner die Steigung k des Seils) sein soll, desto stärker müssen Sie am Seil ziehen. Skizzieren Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen Steigung (auf der Rechtsachse des Koordinatensystems) und der nötigen Zugkraft (Hochachse) intuitiv. Sie können die Skizze durch eine Messreihe überprüfen, indem Sie am vertikalen Seil am rechten Bildrand mehrere Flaschen anhängen.

Fig. 4 hängende Bierflasche.

Bildquellen: Brücke: Thinkstock (iStock/eurotravel), München; restliche Bilder: Wolfgang Riemer
Autor: Wolfgang Riemer

2 Vektorielle Zerlegung von Kräften – Polstellen von Funtionen „fühlen“

Wir legen den Ursprung (0|0) des Koordinatensystems in den Punkt, in dem die Last g der Größe 1 am Seil hängt. Die Haken haben dann die Position (±1; k). Die rechte Hälfte des Seils (und damit auch die Richtung der tragenden Kraft) lässt sich durch eine Ursprungsgerade mit Steigung k beschreiben. Da die Aufhängungen den Abstand 2 besitzen, gibt k auch an, wie tief das Seil durchhängt.

Die nach unten wirkende Last $g = 1$ $\left(\text{vektoriell } \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ wird von beiden Seilen zur Hälfte getragen.

Die in der rechten Seilhälfte wirkende Gegenkraft wird daher beschrieben durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

v_x ist die Horizontal-, $v_y = 0{,}5$ die Vertikalkomponente, die nach oben zieht.

a) Begründen Sie jeden Schritt der Rechnung aus Fig. 6, aus der folgt, dass der Zug in jedem der Seile beschrieben wird durch $|\vec{v}| = 0{,}5\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$.

b) Vergleichen Sie mit Ihrer intuitiven Schätzung aus 1.

c) Wie groß ist der Zug im Seil, wenn die Seillänge $l = 2{,}01$ bzw. 2,001 m beträgt?

d) Geben Sie einen Funktionsterm an, der die Zugkraft $|\vec{v}|$ in Abhängigkeit von der Seillänge l beschreibt.

Plotten Sie den Graphen und kontrollieren Sie durch eine Plausibilitätsbetrachtung.

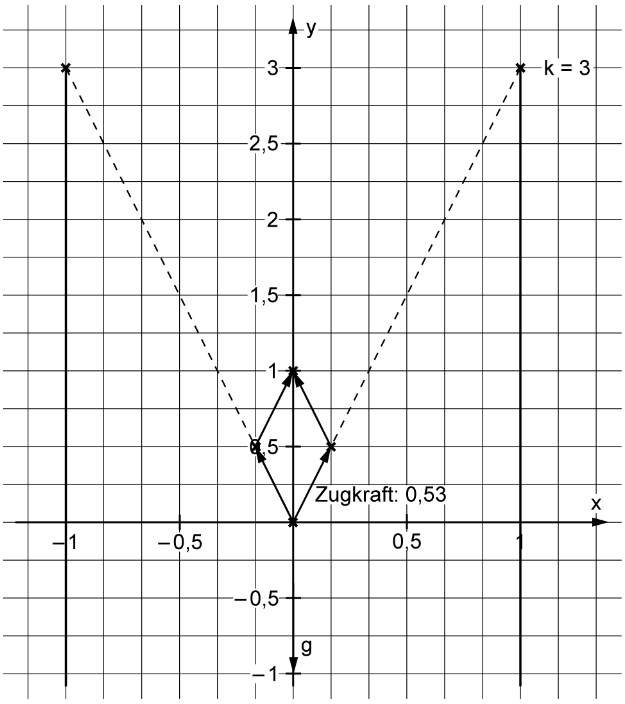

Fig. 5 a: Kraft (roter Vektor) im Seil durch ein „Kräfteparallelogramm“ ermitteln. Hier ist $k = 3$ durch die Aufhängung in den Punkten D (±1; 3).

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{0{,}5}{v_x} = k$$

$$v_x = \frac{0{,}5}{k}$$

$$|\vec{v}| = 0{,}5\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$

Fig. 6 Herleitung: Seilzug in Abhängigkeit von der Steigung k

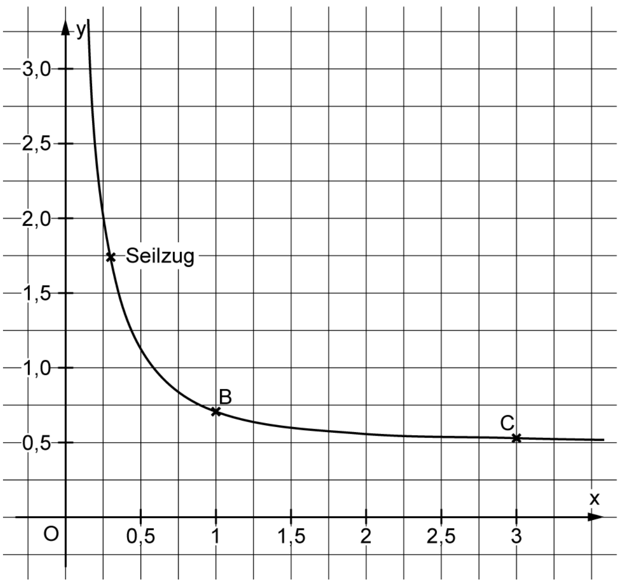

Fig. 7 Grafik: Seilzug in Abhängigkeit von der Steigung k des Seils.

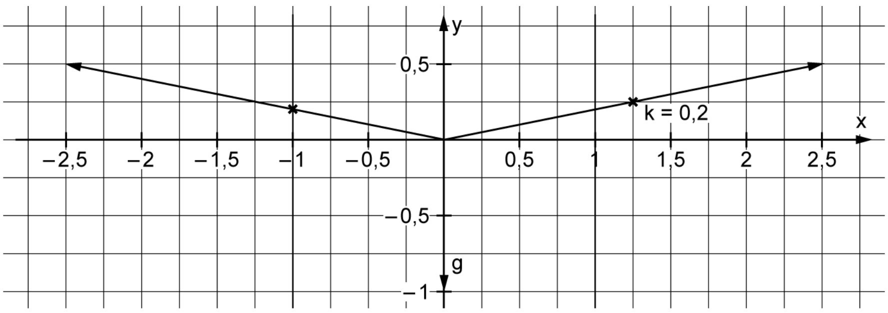

Fig. 5 b: Steigung des Seils $k = 0{,}2$, – Aufhängung in D (±1; 0,2).

Autor: Wolfgang Riemer

3 Hängebrücke selbst bauen und nachmessen

Bei Hängebrücken haben die vertikalen Tragseile gleichen Abstand voneinander. Alle Seile tragen die gleiche Last (Fahrbahn mit Fahrzeugen). Bauen Sie eine solche Hängebrücke nach, indem Sie gleich schwere Metallstangen (oder Besenstiele) durch äquidistant eingeschraubte Ringösen vertikal verschiebbar führen – oder ein Rechenbrett (Abakus) kippen – und die Perlen durch eine eingeflochtene dünne Kette anheben. Überprüfen Sie an einem Karo-Hintergrund (ggf. Schattenprojektion) oder durch Ausmessen eines Fotos, dass die Seilknoten auf einer Parabel liegen.

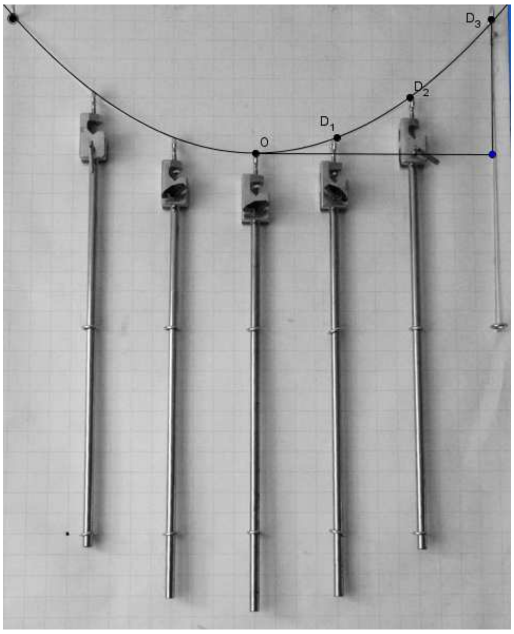

Fig. 8: Parallel geführte Eisenstangen – an einem Seil eingehakt – mit eingepasster Parabel.

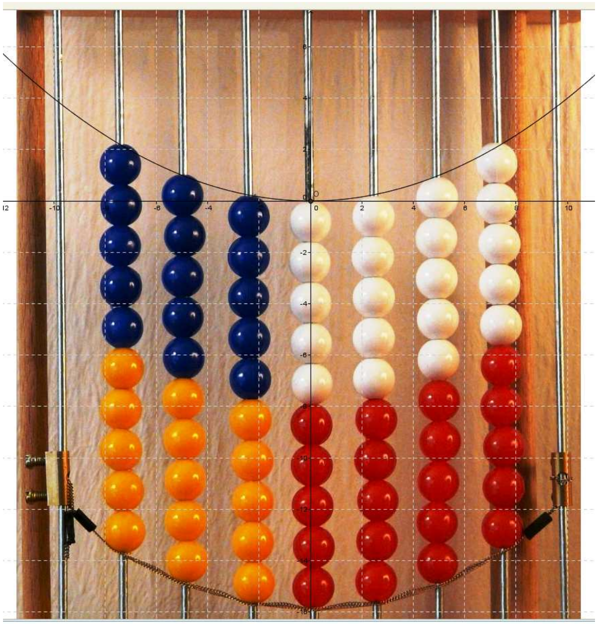

Fig. 9: Quergestelltes Rechenbrett (Abakus) mit eingeflochtenem Kettchen.

Bildquellen: Wolfgang Riemer
Autor: Wolfgang Riemer

4 Begründung der Parabelform

Wir betrachten die Seilkonstruktion aus Fig. 10:

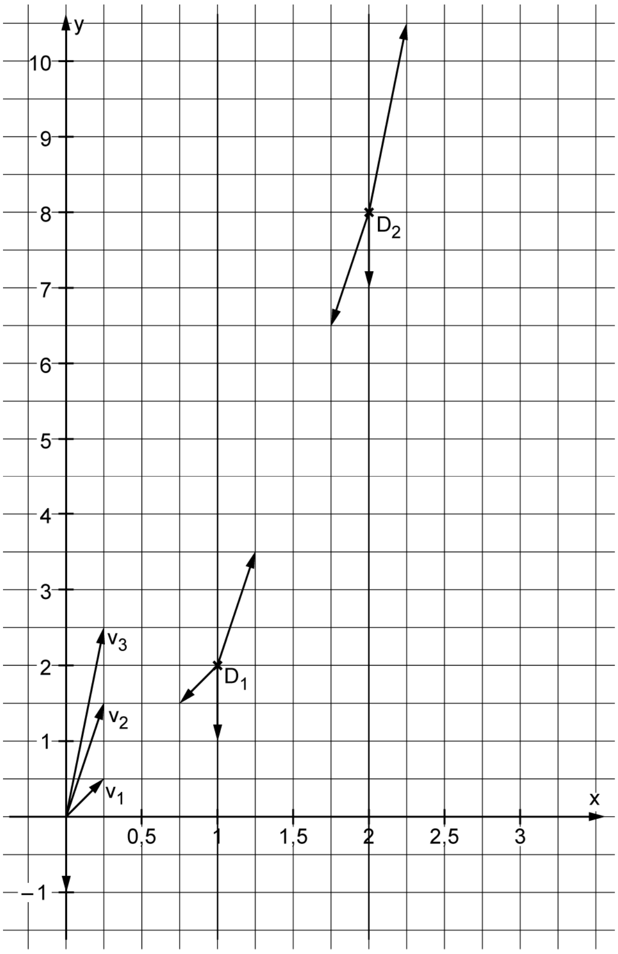

Fig. 10: Aus der Position des ersten Seilknotens erbeben sich die Positionen der übrigen Knoten eindeutig.

Aus der Position $D_1(1\,|\,5)$ des ersten Seilknoten S kann man über die Steigung k die im ersten Seilabschnitt „nach rechts oben" wirkende Kraft $\vec{v}_1$ bestimmen.
Tipp: Aufgabe 2 beachten.

Die im zweiten Seilabschnitt wirkende Kraft $\vec{v}_2$ muss die „nach links unten ziehende" Kraft $-\vec{v}_1$ und das zusätzlich nach unten ziehende Gewicht $\vec{g}$ kompensieren. Es gilt also $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{g}$. (Da $\vec{g}$ nach unten zeigt, ist $-\vec{g}$ nach oben gerichtet). Aus der Richtung dieser Kraft ergibt sich die Steigung des zweiten Seilabschnittes und damit die Position des Knotenpunktes D_2. Analog ergibt sich die Position des dritten Knotenpunktes D_3 aus der Position D_2. Kommentieren Sie in eigenen Worten die folgenden Rechenschritte und begründen Sie, dass die Seilknoten ganz genau auf der Parabel mit $f(x) = kx^2$ liegen **müssen**.

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{0{,}5}{k} \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ Steigung $k \to D_1(1\,|\,k)$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{0{,}5}{k} \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ Steigung $3k \to D_2(2\,|\,k + 3k) = (2\,|\,4k)$

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{0{,}5}{k} \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ Steigung $5k \to D_3(3\,|\,4k + 5k) = (3\,|\,9k)$

…

5 Zum Weiterdenken

Bei einer richtigen Hängebrücke wird man das Gewicht der lotrecht hängenden Trageseile gegenüber dem Fahrbahn- und Fahrzeuggewicht nicht ganz vernachlässigen. Nehmen Sie an, dass zu der konstanten Last g zusätzlich Gewichte zu tragen sind, die zu der Höhe der Knotenpunkte über der Fahrbahn proportional sind (Seilgewichte) und studieren Sie die Abweichungen, die sich dann von der Parabelform ergeben z. B. mit einem dynamischen Geometrieprogramm.

Für Bogenbrücken wie in Abb. 1 gibt es eine schöne interaktive Darstellung bei http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/MathePrisma/Module/Parabeln/

Autor: Wolfgang Riemer