



Mathematisches Unterrichtswerk
für das Gymnasium
Ausgabe Nordrhein-Westfalen

von
Prof. August Schmid
Prof. Dr. Ingo Weidig

erarbeitet von
Dr. Detlef Lind, Wuppertal
Angelika Müller, Aachen
Dr. Wolfgang Riemer, Pulheim
Hartmut Schermuly, Wuppertal
Dr. Ingo Weidig, Landau
Dr. Peter Zimmermann, Speyer

Ernst Klett Verlag
Stuttgart Düsseldorf Leipzig

Bildquellenverzeichnis:

Archiv für Kunst und Geschichte, Berlin: S. 162 unten rechts, 163 Vase (Erich Lessing), 175 – Bildarchiv Marburg: S. 176 – Bildarchiv Preussischer Kulturbesitz, Berlin: S. 13 – Deutsches Museum, München: S. 8, 26, 27 alle, 48, 74 oben und unten links, 77 oben, 116 – © 1995 M.C. Escher / Cordon Art, Baarn (NL). All rights reserved: S. 147 – P. Funke, Bietigheim: S. 159 – IFA Bilderteam, München: S. 161 unten links (Renz), – Interfoto: S. 162 oben links (Karl-Heinz Hänel), 162 oben Mitte (TG) – Landschaftsverband Rheinland, Landesbildstelle Rheinland, Düsseldorf: S. 86 oben rechts – Mary Evans Picture Library, London: S. 31 – Mauritius, Stuttgart: S. 6 oben links (ACE), 69 (Pigneter), 97 (Ausloos), 163 UNO-Gebäude (A. Burger), 168 oben rechts (Lehn), 168 oben links (Höck) – Pilatus-Bahnen, Luzern: S. 73 oben rechts – René Röbling, Marburg: S. 161 unten rechts – Michael Steinle, Fellbach: S. 162 oben rechts – TIME-LIFE, „Die Mathematik“, S. 74: S. 62 – Verlag Moritz Diesterweg, „Mathematik für Gymnasien in NRW 9“, S. 57: S. 59 – Werkstattfotografie Neumann + Zörlein, Stuttgart: S. 20

Nicht in allen Fällen war es uns möglich, den uns bekannten Rechtsinhaber ausfindig zu machen. Berechnete Ansprüche werden selbstverständlich im Rahmen der üblichen Vereinbarungen abgegolten.



Gedruckt auf Papier aus
chlorfrei gebleichtem Zellstoff,
säurefrei.

2. Auflage

€ 1 18 17 16 15 | 2011 2010 2009 2008 2007

Alle Drucke dieser Auflage können im Unterricht nebeneinander benutzt werden; sie sind im Wesentlichen untereinander unverändert. Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes. Ab dem Druck 2000 ist diese Auflage auf die Währung EURO umgestellt. Zum überwiegenden Teil sind in den Aufgaben keine zahlenmäßigen Veränderungen erfolgt. Die wenigen notwendigen Änderungen sind mit € gekennzeichnet. Lösungen und Hinweise zu diesen Aufgaben sind im Internet unter <http://www.klett-verlag.de> verfügbar.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 1996.

Internetadresse: <http://www.klett-verlag.de>

Alle Rechte vorbehalten.

Zeichnungen: U. Bartl, Weil der Stadt;

Bertron & Schwarz, W. Müller, Schwäbisch Gmünd.

Umschlaggestaltung: Alfred Marzell, Schwäbisch Gmünd.

DTP-Satz: topset Computersatz, Nürtingen.

Reproduktion: SCHNITZER DRUCK GmbH, 71404 Korb.

Druck: Druckhaus Götz GmbH, 71636 Ludwigsburg. Printed in Germany.

ISBN 3-12-730740-3

1 Entscheiden unter Unsicherheit

Experiment 1 Ziehen mit Zurücklegen

Eva wählt zufällig einen von drei unterschiedlich gefüllten, **äußerlich aber gleich aussehenden** Beuteln. Sie zieht dann aus dem gewählten Beutel eine Kugel, die sie anschließend zurücklegt und mit den übrigen Kugeln vermischt.

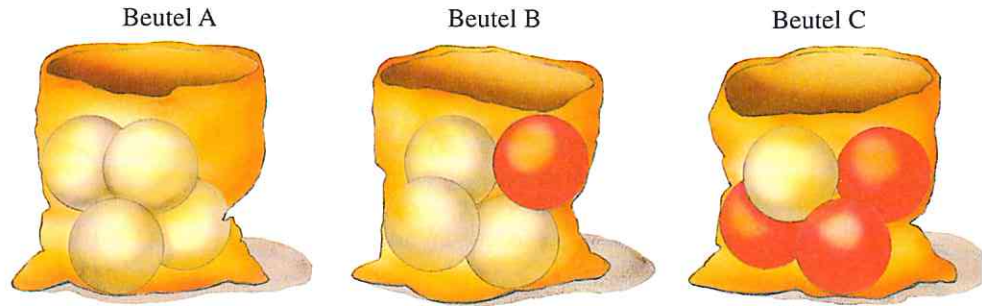


Fig.

- 1 Aus welchem Beutel zieht Eva vermutlich, wenn sie
 - a) im ersten Zug eine rote Kugel zieht,
 - b) im ersten Zug eine weiße Kugel zieht,
 - c) im ersten und zweiten Zug je eine weiße Kugel zieht,
 - d) im ersten und zweiten Zug je eine rote Kugel zieht,
 - e) im ersten Zug eine weiße, im zweiten Zug eine rote Kugel zieht?

2 Eva hat bei Experiment 1 fünfmal eine Kugel gezogen. Sie erhielt: weiß, weiß, weiß, weiß, rot. Nach jeder Ziehung haben Ulrike und Volker gefühlsmäßig geschätzt, mit welcher Wahrscheinlichkeit Eva den Beutel A, B oder C verwendet:

Schätzungen

		Schätzung Ulrike			Schätzung Volker		
Nr.	Farbe	A	B	C	A	B	C
anfangs		33 %	33 %	33 %	33 %	33 %	33 %
1	weiß	55 %	30 %	15 %	60 %	25 %	15 %
2	weiß	60 %	30 %	10 %	70 %	20 %	10 %
3	weiß	75 %	20 %	5 %	85 %	10 %	5 %
4	weiß	80 %	18 %	2 %	95 %	4,5 %	0,5 %
5	rot	0 %	95 %	5 %	0 %	100 %	0 %

- a) In beiden Schätzungen sinkt zunächst die Wahrscheinlichkeit für Beutel B. Dann steigt sie plötzlich stark an. Wie ist das zu erklären?
- b) Welcher Schätzung stimmst du eher zu? Gib selbst eine Schätzung ab.

Durchführung des Experiments

3 Führe das Experiment in deiner Klasse durch: Ein Schüler wählt zufällig einen der gleich aussehenden Beutel. Aus diesem Beutel zieht er eine Kugel, zeigt die Farbe, legt die Kugel zurück und mischt.
Die Ziehungen werden wiederholt, bis ihr „hinreichend sicher“ entscheiden könnt, welcher Beutel vorliegt. Während des Versuchs protokolliert jeder seine Schätzungen. Am Ende wird der Inhalt des Beutels eingesehen und die getroffene Entscheidung überprüft.

Experiment 2

Ergebnis	Regel	
	I	II
KK	T	T
KZ	N	T
ZK	N	T
ZZ	N	N

Hiki wirft gleichzeitig zwei Münzen. Nach jedem Wurf sagt sie „Treffer“ (T) oder „Niete“ (N) gemäß einer der beiden Regeln:

Regel I: Wenn beide Münzen „Kopf“ zeigen sagt sie „Treffer“, sonst „Niete“.

Regel II: Wenn mindestens eine Münze „Kopf“ zeigt, sagt sie „Treffer“, sonst „Niete“.

4 a) Was sagt Hiki in Experiment 2 bei dem Versuchsablauf:

ZZ, ZK, ZZ, KK, KZ, KK, KZ, ZK, wenn sie Regel I (Regel II) anwendet?

b) Bei zehn Würfeln ergab sich T T T N T T N N T T (T T N N N T N N N N).

Nach welcher Regel hat Hiki vermutlich geantwortet?

5 Hiki hält die von ihr gewählte Regel geheim. Beate versucht Schritt für Schritt herauszufinden, welche der beiden Regeln Hiki anwendet. Hier ihre Notizen.

a) Wie wirkt sich Treffer bzw. Niete auf Beates Schätzung aus?

b) Ist deiner Meinung nach Beates Schätzung am Ende „80 % für Regel I“ eher zu groß oder eher zu klein?

Nr.	Antwort	Regel I	Regel II
anfangs		50 %	50 %
1	Niete	60 %	40 %
2	Treffer	50 %	50 %
3	Niete	60 %	40 %
4	Niete	70 %	30 %
5	Niete	75 %	25 %
6	Treffer	72 %	28 %
7	Niete	80 %	20 %

Durchführung des Experiments

6 Führe das Experiment in deiner Klasse durch. Schätze nach je 5 Würfeln, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Regeln I und II benutzt werden. Entscheide dich nach 15 Würfeln und prüfe anschließend, ob die Entscheidung richtig war.

In manchen Situationen ist man unsicher: Verschiedene Alternativen sind möglich, man kann aber nicht sagen, welche zutrifft. Man ordnet diesen Alternativen **Wahrscheinlichkeiten** zu.

Um die Unsicherheit zu reduzieren, sammelt man Informationen („**Indizien**“), die meist verschieden stark für die einzelnen Alternativen sprechen. Man wird veranlasst, die **Wahrscheinlichkeiten zu überdenken und möglicherweise abzuändern**.

a priori: anfangs
a posteriori: nachträglich

Die Wahrscheinlichkeiten, die man den Alternativen am Anfang zuordnet, heißen **a priori** Wahrscheinlichkeiten; die in der Folge von Beobachtungen möglicherweise geänderten Wahrscheinlichkeiten nennt man **a posteriori** Wahrscheinlichkeiten.

Hinweis zum
Schätzen

Wenn ein Indiz durch eine Alternative wahrscheinlicher hervorgerufen wird als durch die anderen, dann spricht die Beobachtung dieses Indizes eher für das Vorliegen dieser Alternative. Das Indiz **stützt** diese Alternative.

So hat in Experiment 1 das Ziehen von „weiß“ bei den Beuteln A, B, C die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{1}{4}$. Deswegen stützt das Indiz „weiß“ die Alternative „Eva zieht aus Beutel A“ viermal stärker als die Alternative „Eva zieht aus Beutel C“. Die Alternative „Eva zieht aus Beutel B“ wird dreimal stärker gestützt als die Alternative „Eva zieht aus Beutel C“.

Entscheiden

Wenn die a posteriori Wahrscheinlichkeit einer Alternative durch hinreichend viele Informationen genügend groß geworden ist, ist man bereit, sich für diese Alternative zu **entscheiden**. Die Summe der übrigen a posteriori Wahrscheinlichkeiten gibt an, wie stark man trotz der Entscheidung noch an die restlichen Alternativen glaubt. Es handelt sich um die **Irrtumswahrscheinlichkeit**.

Beispiel 1

In der Tabelle zu Aufgabe 2 hätte sich Ulrike nach viermaligem Auftreten des Indizes „weiß“ für die Alternative „Eva zieht aus Beutel A“ entschieden. Wie groß schätzt sie zu diesem Zeitpunkt ihre Irrtumswahrscheinlichkeit ein?

Lösung:

Obwohl Ulrike auf Beutel A tippt, glaubt sie (Tabellenzeile 4) mit $18\% + 2\% = 20\%$ Wahrscheinlichkeit an die Alternativen „Eva zieht aus Beutel B“ oder „Eva zieht aus Beutel C“. Ulrike schätzt ihre Irrtumswahrscheinlichkeit auf 20%.

vier Alternativen

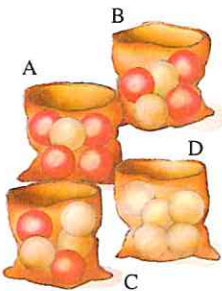


Fig. 1

Beispiel 2

Walter wählt einen der vier Beutel A, B, C, D und zieht daraus eine weiße Kugel.

a) Für welchen Beutel spricht dieses Indiz am stärksten? Wievielmals stärker spricht es für Beutel C als für Beutel B?

b) Walter zieht aus dem Beutel dreimal mit Zurücklegen „weiß, weiß, rot“. Welche der vier Alternativen wird durch das dreistufige Indiz „wwr“ am stärksten gestützt?

Lösung:

a) Das Indiz „weiß“ besitzt unter den vier Alternativen die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{5}$. Die Alternative „Walter zieht aus Beutel D“ wird am stärksten gestützt. Das Indiz spricht $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 1,5$ -mal stärker für die Alternative „Walter zieht aus Beutel C“ als für die Alternative „Walter zieht aus Beutel B“.

b) Man wendet die Pfadregel an. Die Reihenfolge der Farben spielt keine Rolle.

Die Wahrscheinlichkeiten des Indizes „wwr“ sind unter den vier Alternativen

$$\text{Beutel A: } \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{125} \approx 3,2\%,$$

$$\text{Beutel B: } \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{125} \approx 9,6\%,$$

$$\text{Beutel C: } \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{125} \approx 14,4\%,$$

$$\text{Beutel D: } \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{0}{5} = \frac{0}{125} = 0,0\%.$$

Die Alternative „Walter zieht aus Beutel C“ wird am stärksten gestützt.

Aufgaben**Irrtumswahrscheinlichkeit**

7 a) In der Tabelle zu Aufgabe 2 entscheiden sich Ulrike und Volker im letzten Schritt für die Alternative „Eva zieht aus Beutel B“. Wie schätzen die beiden ihre Irrtumswahrscheinlichkeit ein?

b) In der Tabelle zu Aufgabe 5 entscheidet sich Beate im letzten Schritt für die Alternative „Hiki benutzt Regel I“. Wie schätzt Beate ihre Irrtumswahrscheinlichkeit ein?

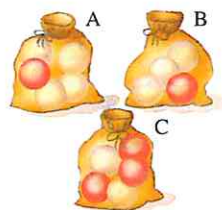
***8** Ulla meint, Fehlentscheidungen lassen sich beim Ziehen mit Zurücklegen von Kugeln aus Beuteln sicher vermeiden, wenn man oft genug zieht. Hat sie recht?

Stützen, Pfadregel

9 Babsi wählt einen der drei Beutel A, B, C und zieht daraus „rot“ (in drei Zügen mit Zurücklegen „rot, rot, weiß“). Wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten des beobachteten Indizes? Welche der drei Alternativen wird am stärksten gestützt?

10 a) Mario hat zwischen einem Legosteine und einem Würfel gewählt. Er wirft „3“. Benutzt er eher einen Würfel oder eher einen Legosteine?

b) Auch Micha wählt zwischen einem Legosteine und einem Würfel. Er wirft dreimal und erhält „3–4–3“. Berechne mit der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit dieses Indizes. Welche Alternative: Würfel oder Legosteine wird durch dieses Indiz stärker gestützt?



Legosteine	
1	11%
2	1,5%
3	45%
4	30%
5	1,5%
6	11%



Thomas Bayes
(sprich beIz,
1702–1761)

2 Regel von Bayes

Joseph Bertrand
(1822–1900)



1 Bertrands Schubfachproblem

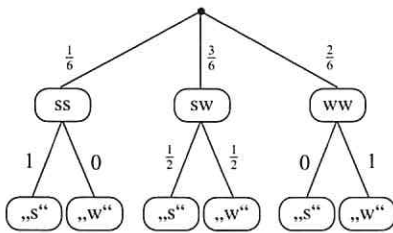
Bertrand hat drei gleich aussehende Schränke mit je zwei Schubladen. In jeder Schublade liegt eine Münze; im ersten Schrank gg enthalten beide Schubladen Goldmünzen, im zweiten Schrank gs liegt eine Gold- und eine Silbermünze. Im dritten Schrank ss enthalten beide Schubladen Silbermünzen. Frank wählt zufällig einen Schrank, zieht zufällig eine Schublade und sieht eine Goldmünze. Wie groß ist nach dieser Entdeckung die Wahrscheinlichkeit, dass auch die zweite Schublade eine Goldmünze enthält?

Frank tippt, wie die meisten Menschen, auf $\frac{1}{2}$. Die richtige Lösung lautet aber $\frac{2}{3}$. Wie könnte man das durch ein Experiment bestätigen?

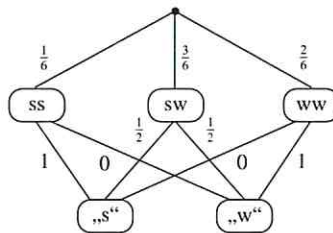
Experiment 3

In einem Beutel liegen sechs Chips. Einer ist beiderseitig schwarz: ss, drei sind auf einer Seite schwarz, auf der anderen Seite weiß: sw, und zwei sind beiderseitig weiß: ww. Helge greift in den Beutel und zieht zufällig einen Chip. Welche Farben hat der Chip?

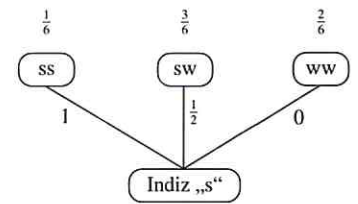
Die a priori Wahrscheinlichkeiten der drei Alternativen sind $\frac{1}{6}$ für ss, $\frac{3}{6}$ für sw, $\frac{2}{6}$ für ww. Um die Unsicherheit über die Farbkombination zu reduzieren, wirft Helge den gezogenen Chip. Schwarz liegt oben. Welche a posteriori Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus diesem Indiz für die Farbkombination?



Baumdiagramm



verkürztes Baumdiagramm



Bayes-Diagramm (nur das tatsächlich beobachtete Indiz interessiert)

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Die Pfade zum Indiz „S“ haben die Wahrscheinlichkeiten

$$\text{Pfad über ss: } \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{2}{12}$$

$$\text{Pfad über sw: } \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{12}$$

$$\text{Pfad über ww: } \frac{2}{6} \cdot 0 = \frac{0}{12}$$

$$\text{Summe (totale Wahrscheinlichkeit): } \frac{5}{12}$$

Die totale Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{12}$ gibt an, „wie sehr“ man das Indiz „S“ vor dem Wurf erwartet hätte. Die einzelnen Alternativen liefern unterschiedlich große Beiträge $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ und $\frac{0}{12}$ hierzu. Die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der Alternativen sind die Anteile dieser Beiträge an der totalen Wahrscheinlichkeit:

a posteriori Wahrscheinlichkeit

$$\text{von ss: } \frac{2}{12} : \frac{5}{12} = \frac{2}{5} = 40\%$$

$$\text{von sw: } \frac{3}{12} : \frac{5}{12} = \frac{3}{5} = 60\%$$

$$\text{von ww: } \frac{0}{12} : \frac{5}{12} = \frac{0}{5} = 0\%$$

Die Wahrscheinlichkeiten der Alternativen ss, sw, ww haben sich durch Beobachtung des Indizes „S“ von 16,7 % bzw. 50 % bzw. 33,3 % auf 40 % bzw. 60 % bzw. 0 % geändert.

Andere Begründung:
Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Alternativen für das Indiz verantwortlich sind, verhalten sich wie 3 zu 2 zu 0, es handelt sich daher um $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{0}{5}$.

Regel von Bayes: Man erhält die **a posteriori** Wahrscheinlichkeit einer Alternative, indem man die Wahrscheinlichkeit des **zugehörigen** Pfades durch die totale Wahrscheinlichkeit des beobachteten Indizes teilt.

$$\text{a posteriori Wahrscheinlichkeit einer Alternative} = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Pfades}}{\text{totale Wahrscheinlichkeit des Indizes}}$$

Beispiel 1

Welche a posteriori Wahrscheinlichkeiten ergeben sich bei Experiment 3 für die Farbkombinationen ss, sw, ww, wenn der Chip, den Helge zufällig gezogen hat, in zwei Würfeln beide Mal „weiß“ zeigt?

Lösung 1:

Verwende die Regel von Bayes zweimal nacheinander, wobei die a posteriori Wahrscheinlichkeiten nach dem ersten Schritt die a priori Wahrscheinlichkeiten des zweiten Schrittes sind.

erster Schritt

Wahrscheinlichkeiten der Pfade zum Indiz:

$$\text{über ss: } \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{0}{12}$$

$$\text{über sw: } \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{12}$$

$$\text{über ww: } \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{4}{12}$$

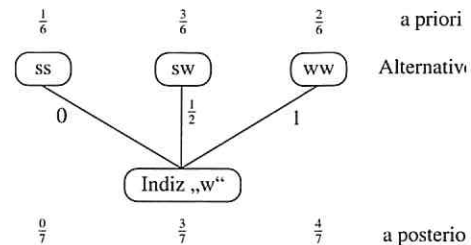
$$\text{Summe: } \frac{7}{12}$$

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Alternative ss: } \frac{0}{12} : \frac{7}{12} = \frac{0}{7}$$

$$\text{Alternative sw: } \frac{3}{12} : \frac{7}{12} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Alternative ww: } \frac{4}{12} : \frac{7}{12} = \frac{4}{7}$$



Bayes-Diagramm, einstufiges Indiz

Fig

zweiter Schritt

Wahrscheinlichkeiten der Pfade zum Indiz:

$$\text{über ss: } \frac{0}{7} \cdot 0 = \frac{0}{14}$$

$$\text{über sw: } \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$$

$$\text{über ww: } \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{8}{14}$$

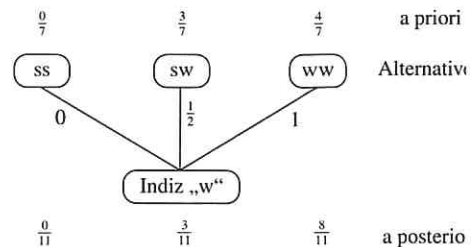
$$\text{Summe: } \frac{11}{14}$$

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Alternative ss: } \frac{0}{14} : \frac{11}{14} = \frac{0}{11}$$

$$\text{Alternative sw: } \frac{3}{14} : \frac{11}{14} = \frac{3}{11}$$

$$\text{Alternative ww: } \frac{8}{14} : \frac{11}{14} = \frac{8}{11}$$



Bayes-Diagramm, einstufiges Indiz

Fig

beide Schritte auf einmal

Lösung 2:

Betrachte „ww“ als zweistufiges Indiz.

Wahrscheinlichkeiten der Pfade zum Indiz:

$$\text{über ss: } \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{über sw: } \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{24}$$

$$\text{über ww: } \frac{2}{6} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{24}$$

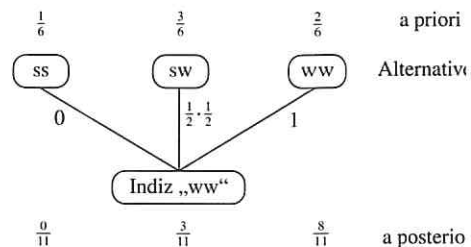
$$\text{Summe: } \frac{11}{24}$$

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{für ss: } 0 : \frac{11}{24} = 0$$

$$\text{für sw: } \frac{3}{24} : \frac{11}{24} = \frac{3}{11}$$

$$\text{für ww: } \frac{8}{24} : \frac{11}{24} = \frac{8}{11}$$



Bayes-Diagramm, zweistufiges Indiz

Fig

Durch Beobachtung des Indizes „ww“ haben sich die Wahrscheinlichkeiten der Alternative von $\frac{1}{6} \approx 16,7\%$ bzw. $\frac{3}{6} = 50\%$ bzw. $\frac{2}{6} \approx 33,3\%$ verändert zu:

0 bzw. $\frac{3}{11} \approx 27,3\%$ bzw. $\frac{8}{11} \approx 72,7\%$.

Ergebnis	Regel	
	I	II
KK	T	T
KZ	N	T
ZK	N	T
ZZ	N	N

Beispiel 2

Die beiden Regeln, nach denen Hiki in Experiment 2 (S. 181) die Ergebnisse ihres Doppel-Münzwurfs als Treffer (T) und Niete (N) bekannt gibt, sind a priori gleich wahrscheinlich. In einem dreistufigen Experiment nennt Hiki nacheinander „Treffer, Niete, Treffer“. Mit welcher Wahrscheinlichkeit antwortet sie nach Regel II?

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeiten für „TNT“ sind bei Regel I: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$ und bei Regel II: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$.

Wahrscheinlichkeiten der Pfade zum Indiz:

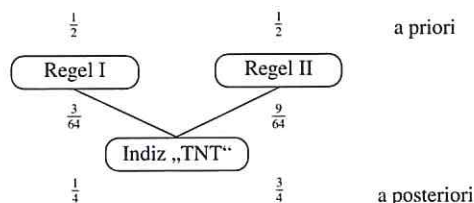
über Regel I: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{64} = \frac{3}{128}$
über Regel II: $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{64} = \frac{9}{128}$ } Summe: $\frac{12}{128}$

a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten

für Regel I: $\frac{3}{128} : \frac{12}{128} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

für Regel II: $\frac{9}{128} : \frac{12}{128} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Hiki antwortet mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ nach Regel II.



Bayes-Diagramm, dreistufiges Indiz

Fig. 1

Beispiel 3

Nele hat zwischen einem Würfel und einem Lego-Achter gewählt. Beide Alternativen sind a priori gleich wahrscheinlich. Sie würfelt nacheinander 4, 3, 1, 3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwendet sie einen Legosteine?

Lösung 1:

Man schaltet vier Bayes-Diagramme hintereinander.

Rechenbeispiel Schritt 1:

Pfad 1: $0,5 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,0833$

Pfad 2: $0,5 \cdot 0,3 = 0,1500$ } 0,2333

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

Würfel: $0,0833 : 0,2333 \approx 0,3571$

Lego: $0,1500 : 0,2333 \approx 0,6429$

Rechenbeispiel Schritt 2:

Pfad 1: $0,3571 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,0595$

Pfad 2: $0,6429 \cdot 0,45 \approx 0,2893$ } 0,3488

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

Würfel: $0,0595 : 0,3488 \approx 0,1706$

Lego: $0,2893 : 0,3488 \approx 0,8294$

Lösung 2:

„4-3-1-3“ ist ein vierstufiges Indiz.

Wahrscheinlichkeiten der Pfade zum Indiz:

über Würfel: $0,5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \approx 0,0003858$

über Lego: $0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,45 \cdot 0,11 \cdot 0,45 \approx 0,003341$

Summe: 0,003727

a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

Würfel: $\frac{0,0003858}{0,003727} \approx 0,1035$

Lego: $\frac{0,003341}{0,003727} \approx 0,8965$

Nele verwendet mit fast 90%iger Wahrscheinlichkeit einen Lego-Achter.



	1	2	3	4	5	6
Würfel	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Legosteine	11 %	1,5 %	45 %	30 %	1,5 %	11 %

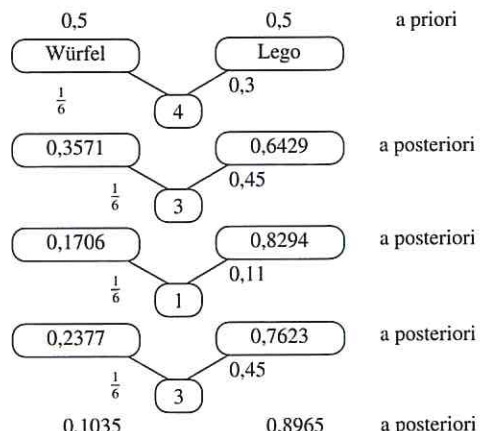


Fig. 2

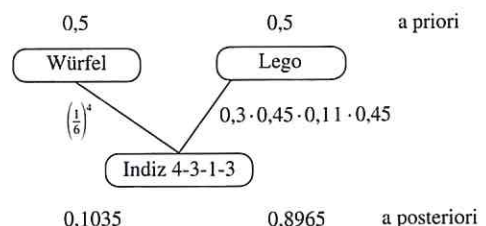


Fig. 3

Rechnung mit 4 gültigen Ziffern

Aufgaben

Einmalige Anwendung der Regel von Bayes, einfaches Indiz

2 Zwei äußerlich gleich aussehende Socken sind wie folgt mit roten „r“ und weißen „w“ Kugeln gefüllt.

- a) Socke 1: rrw Socke 2: rww
b) Socke 1: rrww Socke 2: rwww
c) Socke 1: rrw Socke 2: rrrrww
d) Socke 1: rrwww Socke 2: rr

Eine der Socken wird zufällig ausgewählt, ihr wird zufällig eine Kugel entnommen, sie ist rot. Berechne jeweils die a posteriori Wahrscheinlichkeiten für die beiden Socken.

Bayes-Diagramm zu a)

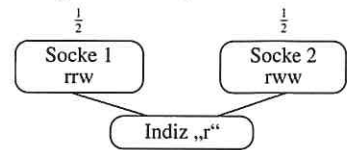


Fig. 1

3 Fünf gleich aussehende Socken sind mit Kugeln gefüllt:

- a) eine Socke mit Füllung 1: rrrrw ,
vier Socken mit Füllung 2: rwwww ,
b) drei Socken mit Füllung 1: rrww ,
zwei Socken mit Füllung 2: rwwww .

Man zieht aus einer zufällig gewählten Socke zufällig eine Kugel. Sie ist rot. Berechne die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der Füllungen 1 und 2.

Bayes-Diagramm zu a)

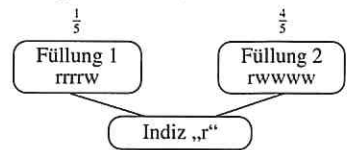


Fig. 2

4 Löse Bertrands Schubfachproblem (Aufgabe 1, S. 183) mit einem Bayes-Diagramm.

Wenn man nur einmal wirft, handelt es sich um Bertrands Schubfachproblem.

5 Von drei Chips ist einer beiderseitig weiß (ww), einer beiderseitig schwarz (ss), der dritte ist auf einer Seite schwarz, auf einer Seite weiß (sw). Tomek zieht zufällig einen Chip und wirft ihn zweimal (dreimal). Jedes Mal ist weiß zu sehen. Wie groß ist die a posteriori Wahrscheinlichkeit, daß Tomek einen sw-Chip gezogen hatte?

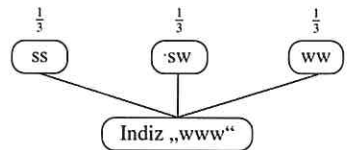


Fig. 3

6 Von vier Chips sind zwei beiderseitig schwarz, einer ist beiderseitig weiß, einer ist auf einer Seite weiß, auf der anderen Seite schwarz. Man zieht zufällig einen Chip. Er ist auf einer Seite schwarz. Zeichne ein Bayes-Diagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Seite schwarz ist.

7 30 % aller Teilnehmer einer Konferenz sind Amerikaner. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Amerikaner zum Frühstück Tomatensaft trinkt, ist 20 %. Bei einem Nichtamerikaner beträgt sie nur 2 %. Du siehst einen Konferenzteilnehmer Tomatensaft trinken. Zeichne ein Bayes-Diagramm. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er Amerikaner ist.

8 Drei Tümpel enthalten 1, 2 bzw. 3 Fische. Ein Tümpel wird zufällig ausgewählt und hier wird ein Fisch gefangen, markiert und wieder freigelassen. Am nächsten Tag wird in demselben Teich wieder ein Fisch gefangen, der markiert (unmarkiert) ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewählte Tümpel 1, 2 bzw. 3 Fische enthält?

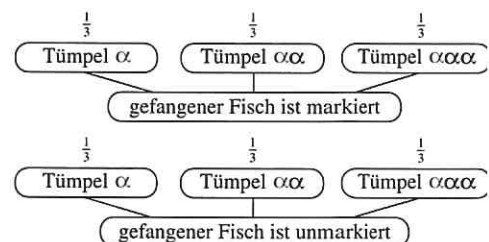


Fig. 4

9 In einem Strafprozess kommen aufgrund eindeutiger Indizien nur der Chauffeur (C), der Gärtner (G) oder der Kellner (K) als Täter in Frage. Die Kommissarin hält C, G, K der Reihe nach mit den Wahrscheinlichkeiten 20 %, 30 %, 50 % für den Täter. Nun taucht ein neues Indiz auf: der Täter hat am Tatort eine Filterzigarette geraucht. C ist Nichtraucher, G und K sind starke Raucher, G raucht in 50 %, K in 90 % aller Fälle Filterzigaretten. Wie sollte die Kommissarin ihre Wahrscheinlichkeiten abändern?

10 Die a priori Wahrscheinlichkeit, dass nachts ein abgestellter PKW aufgebrochen wird, beträgt 0,035 %. Wenn er aufgebrochen wird, dann schlägt die Alarmanlage mit 99,5%iger Wahrscheinlichkeit an. Aber auch wenn sich niemand am Auto zu schaffen macht, geht die Alarmanlage manchmal von selbst an. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms beträgt 0,1 %. Die Alarmanlage ertönt.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der PKW aufgebrochen wurde?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der PKW aufgebrochen wurde, wenn der Fehlalarm nur mit Wahrscheinlichkeit 0,02 % ausgelöst wird? Vergleiche mit a).

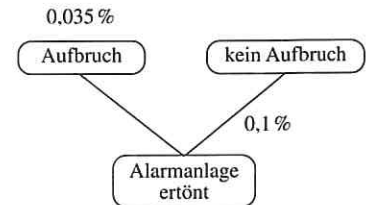
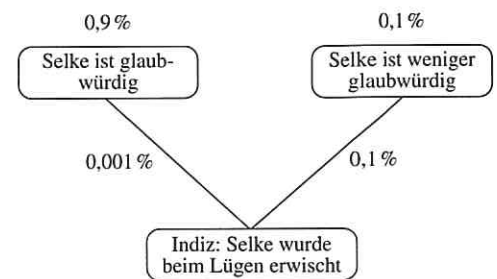


Fig. 1

11 „Wer einmal lügt, dem glaubt man nicht.“ Um ein Bayes-Diagramm zu diesem Sprichwort zeichnen zu können, unterteilen wir Menschen in glaubwürdige und weniger glaubwürdige. Auf welchen a posteriori Wert sinkt die Wahrscheinlichkeit, daß Selke glaubwürdig ist, nachdem man ihn einmal beim Lügen erwischt hat? Benutze die willkürlich gesetzten Zahlenangaben des Diagramms.



Bayes-Diagramm zum Sprichwort

Fig. 2

Wiederholte Anwendung der bayesschen Regel, mehrstufige Indizien

12 Von sechs Chips ist einer beiderseitig weiß (ww), einer beiderseitig schwarz (ss), die übrigen vier sind auf einer Seite schwarz, auf einer Seite weiß (sw). Adi zieht zufällig einen Chip.

- Er wirft ihn, weiß liegt oben. Er wirft nochmals: wieder weiß. Auch beim dritten Mal zeigt sich weiß. Berechne nach jedem Schritt die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der drei möglichen Farbkombinationen, wobei die a posteriori Wahrscheinlichkeiten gleichzeitig die a priori Wahrscheinlichkeiten der folgenden Stufe sind.
- Kontrolliere dein Endergebnis durch einmalige Anwendung der Regel von Bayes mit dem dreistufigen Indiz „www“.

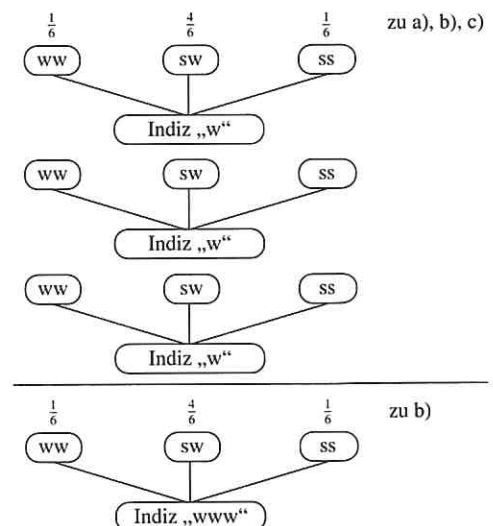


Fig. 3

Auf der Begleiddiskette
„BAYES“ ist diese Tabelle
mit Rechenschema als
Works- und Excel-Datei
gespeichert:
CHIP532.WKS,
CHIP532.XLS.

13 Ein Beutel enthält zehn Chips. Fünf sind beiderseitig weiß (ww), zwei sind beiderseitig schwarz (ss). Die übrigen drei sind schwarz-weiß (sw). Ein zufällig gezogener Chip wird wiederholt geworfen. Achtmal fällt weiß, beim neunten Mal fällt schwarz, dann noch zwei mal weiß.

a) Rechne im Heft nach, dass die Angaben der Zeilen 1 und 2 der Tabelle stimmen.
b) Erkläre anschaulich den Sprung der a posteriori Wahrscheinlichkeiten nach dem achten Wurf.

* c) Welche Bedeutung hat das starke Anwachsen der totalen Wahrscheinlichkeit auf über 99 % ?
Warum bleibt sie nach dem Auftreten von „schwarz“ konstant bei 0,5 ?

Nr.	In- diz				Nebenrechnungen			totale Wahrsc
		Chip ww	Chip sw	Chip ss	Pfad 1	Pfad 2	Pfad 3	
	anfangs	0,5	0,3	0,2				
1	w	0,769231	0,230769	0	0,5	0,15	0	0,65
2	w	0,869565	0,130435	0	0,769231	0,115385	0	0,884615
3	w	0,930233	0,069767	0	0,869565	0,065217	0	0,934783
4	w	0,963855	0,036145	0	0,930233	0,034884	0	0,965117
5	w	0,981595	0,018405	0	0,963855	0,018072	0	0,981927
6	w	0,990712	0,009288	0	0,981595	0,009202	0	0,990795
7	w	0,995334	0,004666	0	0,990712	0,004644	0	0,995356
8	w	0,997662	0,002338	0	0,995334	0,002333	0	0,997667
9	s	0	1	0	0	0,001169	0	0,001169
10	w	0	1	0	0	0,5	0	0,5
11	w	0	1	0	0	0,5	0	0,5

14 Adam wählt zufällig einen der drei Beutel A, B, C und zieht daraus fünfmal mit Zurücklegen das Farbmuster „w w w w r“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Adam aus Beutel C zieht?

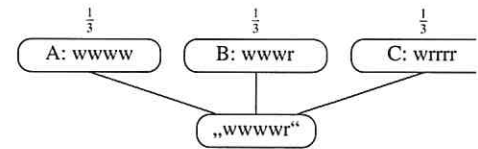


Fig.

15 Ein Test zur Diagnose der Krankheit Xelophanitis („Xelo“) schlägt mit 96%iger Wahrscheinlichkeit an, wenn man an Xelo erkrankt ist. Man sagt dann, der Test ist positiv. Wenn man gesund ist, fällt das Testergebnis mit 94%iger Wahrscheinlichkeit negativ aus. A priori haben bei einer Reihenuntersuchung 0,1 % aller Teilnehmer Xelo.

Frau Sauer unterzieht sich bei einer Reihenuntersuchung diesem Test. Er ist positiv.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Sauer tatsächlich Xelo hat?

b) Da Frau Sauer beunruhigt ist, wiederholt sie den gleichen Test.

Jetzt ist das Ergebnis negativ.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Erkrankung nun?

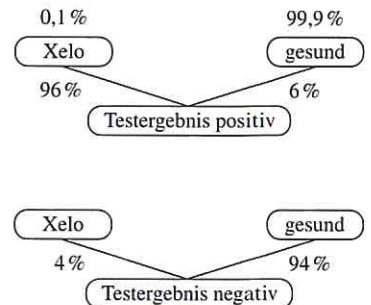


Fig.



16 Der Schalter einer Lampe ist defekt, d. h. er schließt bei Betätigung nur in 30 % aller Fälle. Obwohl Ulla den Schalter 10-mal probiert hat, bleibt es dunkel: „d“. Berechne die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der Alternativen „Birne ganz“ und „Birne defekt“ unter der Voraussetzung, dass die Birne a priori mit 98%iger Wahrscheinlichkeit ganz war.

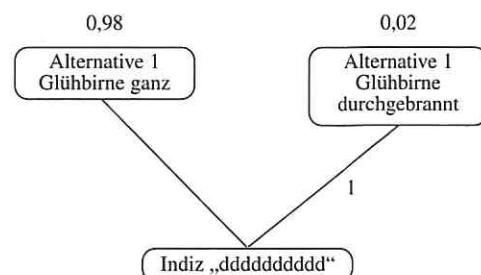


Fig. 1

17 Bianca hat drei Münzen mit einem Becher geworfen. Darunter zeigen 0, 1, 2 oder 3 Münzen „Kopf“. Bianca hebt den Becher vorsichtig an und sieht als Indiz, dass die vorne liegende Münze „Kopf“ zeigt.

- Warum sind die vier Alternativen a priori nicht gleich wahrscheinlich?
- Berechne die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der vier Alternativen.

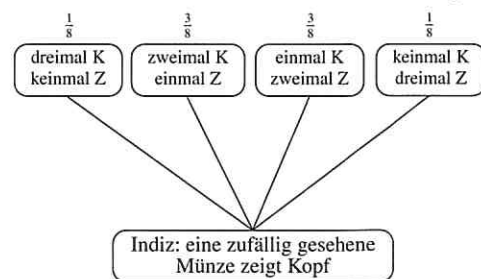


Fig. 2

Zum Grübeln

Das Gefangeneparadoxon hat die gleiche Struktur wie das bekannte Ziegenproblem (Band 7).

*** 18** Gefangeneparadoxon I: Jim, Lukas und Tur wurden verurteilt. Einer der drei wurde ausgelost und begnadigt. Jim denkt sich, die Wahrscheinlichkeit, dass ich es bin, ist $\frac{1}{3}$. Er sagt dem Wärter: „Da nur einer von uns dreien begnadigt wurde, kommt mit Sicherheit Lukas oder Tur ins Gefängnis. Du verrätst mir also nichts, wenn du mir einen der beiden nennst.“ Darauf sagt der Wärter: „Tur kommt ins Gefängnis.“ Jim schöpft Hoffnung. Da Tur ins Gefängnis kommt, wurden entweder Lukas oder ich begnadigt. Meine Chance, begnadigt worden zu sein, ist von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ gestiegen. Zeige mit der Regel von Bayes, dass diese Überlegung falsch ist.

- Warum muss der mittlere Pfad im Bayes-Diagramm mit 1 bewertet werden? Denke daran, dass der Wärter Jim nichts verraten darf. Insbesondere darf er dem Jim niemals sagen: „Du wurdest begnadigt.“
- Ergänze das Diagramm und rechne nach, dass trotz der Information des Wärters Jims a-posteriori-Wahrscheinlichkeit einer Begnadigung nicht angewachsen ist.

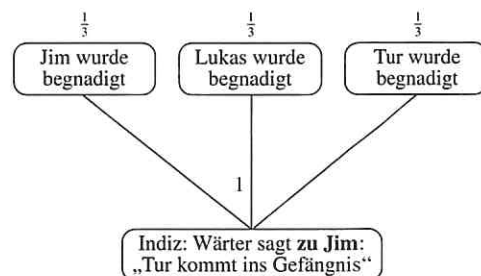


Fig. 3

*** 19** Gefangeneparadoxon II: Diesmal kam dem Jim nicht durch bewusstes Befragen des Wärters, sondern durch zufälliges Mithören eines Gesprächs zu Ohren, dass Tur ins Gefängnis kommt. Begründe, dass an den beiden ersten Pfaden des Diagramms gleiche Wahrscheinlichkeiten stehen müssen und rechne nach, dass die Wahrscheinlichkeit seiner eigenen Begnadigung jetzt tatsächlich von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ angewachsen ist.

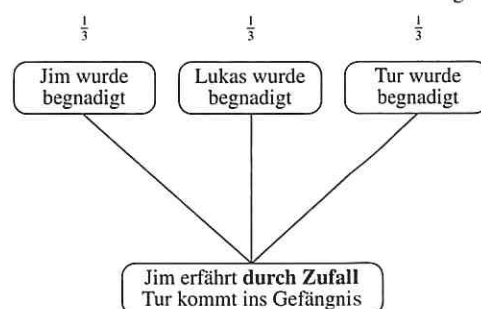


Fig. 4

Ein Vergleich mit Aufgabe 18 zeigt, dass die Bedingung, unter der eine Information zustande kam, wesentlich ist.

3 Das Computerprogramm Bayes

Das Programm ist sofort
lauffähig:
BAYES eintippen
RETURN drücken
Hinweise: Info

Ziel des Programmeinsatzes

Das Programm hilft, bei realen und simulierten Experimenten begründete Entscheidungen zu fällen. Man erlebt die bayessche Regel in Aktion. Durch mögliche Fehlentscheidungen erfährt man die Bedeutung von Irrtumswahrscheinlichkeiten „am eigenen Leibe“. Die Grundzüge des Programms werden anhand von Experiment 1 (Ziehen aus drei unterschiedlich gefüllten Beuteln, S. 180) erläutert. Einzelheiten zur Bedienung des Programms entnimmt man der Online-Hilfe (Taste F1) und dem Menüpunkt Infos.

Datei

Neue Datei
Datei laden F3
Datei speichern F2
Dateitext lesen
Tabelle lesen
Datei löschen
Programm beenden

Menüpunkt Datei

Zu jedem Experiment gehört eine Datei, in der die Versuchsbeschreibung und die Wahrscheinlichkeiten in Tabellenform gespeichert sind, die man zur Anwendung der bayesschen Regel benötigt.

Wenn man nach Start des Programms BAYES die Datei EXP1.BAY geladen hat, kann man den Dateitext und die Tabelle lesen:

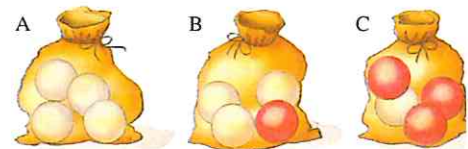
Texteingabe - Beschreibung der Datei Einfügen

Eva wählt zufällig einen von drei mit roten (r) und weißen (w) Kugeln gefüllten, äußerlich aber gleich aussehenden Beuteln. Beutel A (www) enthält vier weiße, B (wwr) drei weiße und eine rote, Beutel C (wrrr) enthält eine weiße und drei rote Kugeln.

Eva zieht dann aus dem gewählten Beutel nacheinander Kugeln, die sie anschließend zurücklegt und mit den übrigen Kugeln vermischt. Sie gibt als Indiz jeweils die Farbe der gezogenen Kugeln bekannt.

Finde mit Hilfe der Indizien heraus, aus welchem Beutel Eva zieht.

Löschen Abbruch Drucken Vorschub OK/Menü



Fig

		A:WWW	B:WWWR	C:WRRR
apriori Wk. →		0.3333	0.3333	0.3333
Rot	R	0.0	0.25	0.75
Weiß	W	1.0	0.75	0.25

Fig. 1

Fig

In der ersten Zeile der Tabelle werden die drei Alternativen, in der ersten Spalte werden die beiden möglichen Indizien bezeichnet. Die zweite Spalte enthält die Tasten („Hotkeys“), mit denen später die aufgetretenen Indizien in den Computer eingegeben werden können. Die übrigen Tabellenzeilen zeigen die a priori Wahrscheinlichkeiten der drei Alternativen und die Wahrscheinlichkeiten, mit denen bei Vorliegen der einzelnen Alternativen die Indizien auftreten.

Beim Erstellen einer neuen Datei (Unterpunkt „Neue Datei“) muss zunächst die Anzahl der Alternativen und die der Indizien festgelegt werden.

Bei Eingabe der Tabelle ergibt sich der Inhalt der unterlegten Felder aus denen der übrigen Felder automatisch.

Bis zu acht Alternativen
und acht Indizien sind zu-
gelassen.

Bearbeiten

Tabelle editieren
Text editieren

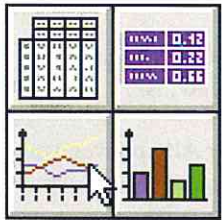
Menüpunkt Bearbeiten

Nachdem man eine Datei geladen hat, kann man sowohl den Dateitext wie auch die Tabelleninhalte ändern, die geänderte Datei kann unter gleichem oder anderem Namen gespeichert werden.

StartReales Experiment
begleiten

Kontrollierte Simulation

Vollständige Simulation



L: Liste

E: Einzelwert

G: Graphik

H: Histogramm

Menüpunkt Start

Die Berechnungen nach der bayesschen Regel sind in drei Varianten möglich.

a) Reales Experiment begleiten: Der Partner des Computer-Benutzers führt das Experiment tatsächlich durch. Er wählt einen der drei Beutel zufällig, zieht daraus mit Zurücklegen und gibt nach jedem Zug das Indiz R oder W bekannt.

Der Benutzer, der herausfinden möchte, aus welchem Beutel sein Partner zieht, gibt die Indizes in den Computer ein. Das geschieht entweder über die Tastatur gemäß der in der Tabelle festgelegten Hotkeys („R“ oder „W“) oder über den Schalter „Indiz“.

b) Kontrollierte Simulation: Die Alternative, von der die Indizes stammen sollen, wird vom Benutzer vorgegeben. Die Indizes werden von einem Zufallsgenerator nach Drücken des zugehörigen Schalters gemäß der gewählten Alternative erzeugt.

Der Benutzer verfolgt, wie sich die a posteriori Wahrscheinlichkeiten, teilweise nach beträchtlichen Schwankungen, auf der vorgegebenen Alternative konzentrieren.

c) Vollständige Simulation: Die Alternative wird vom Computer zufällig gemäß der in der Tabelle festgelegten a priori Verteilung gewählt. Der Benutzer soll diese Alternative erraten. Hierzu fordert er über einen Schalter Indizes an, die von der unbekannten Alternative durch einen Zufallsgenerator erzeugt werden.

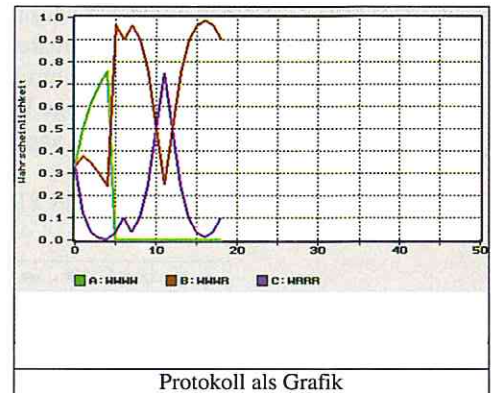
Wenn der Benutzer „hinreichend sicher“ ist, kann er über den Schalter „Prognose“ dem Computer seine Entscheidung bekanntgeben. Als Antwort erhält er die Bewertung „Richtig“ oder „Falsch“. Insbesondere bei Fehlentscheidungen kann eine Fortsetzung des Experimentes spannend sein.

Die a posteriori Verteilungen können als Liste, als Graphik, als Histogramm oder als Einzelwert auf dem Bildschirm dargestellt, gedruckt und gespeichert werden.

		A: WWW	B: WWWR	C: WRRR
		0.3333	0.3333	0.3333
1	W	0.5000	0.3750	0.1250
2	W	0.6154	0.3462	0.0385
3	W	0.6957	0.2935	0.0109
4	W	0.7574	0.2396	0.0030
5	R	0.0000	0.9643	0.0357
6	R	0.0000	0.9000	0.1000
7	W	0.0000	0.9643	0.0357
8	R	0.0000	0.9000	0.1000
9	R	0.0000	0.7500	0.2500
10	R	0.0000	0.5000	0.5000
11	R	0.0000	0.2500	0.7500
12	W	0.0000	0.5000	0.5000

Protokoll zu Experiment 1 in Listenform

Fig. 1



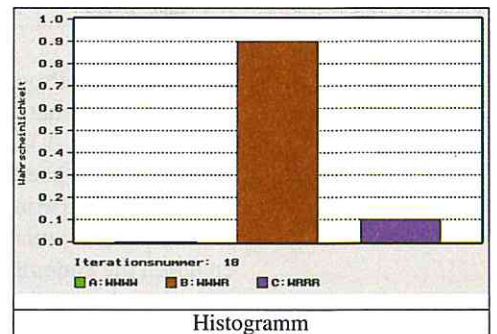
Protokoll als Grafik

Fig. 2

Iterationsnummer : 18	
A:WWW	0.00000000
B:WWWR	0.90000000
C:WRRR	0.10000000

Einzeldarstellung

Fig. 3



Histogramm

Fig. 4

Aufgaben

zur Bedienung des
Programms BAYES

Experiment 1 (S. 180)

- 1 a) Starte das Programm BAYES, lade die Datei EXP1.BAY.
b) Wähle den Menüpunkt Start, experimentiere je einmal mit den Unterpunkten reales Experiment begleiten, kontrollierte Simulation, vollständige Simulation.
- 2 Lade die Datei EXP1.BAY. Wähle im Menüpunkt Bearbeiten den Unterpunkt Tabelle editieren. Ändere die Tabelle so ab, dass sie zur folgenden Variante von Experiment 1 passt. Fünf gleich aussehende Beutel sind folgendermaßen gefüllt: Ein Beutel A mit Inhalt w w w w, zwei Beutel B mit Inhalt w w r r, zwei Beutel C mit Inhalt w r r r. Jemand wählt zu fällig einen der Beutel. Man möchte nur anhand der gezogenen Farben mit der bayesschen Regel herausfinden, aus welchem Beutel gezogen wird.
Hinweis: Ordne den Füllungen A, B und C die a priori Wahrscheinlichkeiten 0,2; 0,4; 0,4 zu, man zieht mit Zurücklegen. Speichere die geänderte Datei unter dem Namen EXP1B.BAY. Experimentiere je einmal mit den Varianten reales Experiment begleiten, kontrollierte Simulation, vollständige Simulation.

Experiment 2 (S. 181)

- 3 a) Erstelle eine neue Datei EXP2.BAY zu Experiment 2 mit den beiden Alternativen: Reg. I, Reg. II und den Indizien Treffer, Niete. Benutze die Hotkeys „T“ und „N“.
b) Begleite ein reales Experiment mit dem Programm BAYES.
c) Führe zwei kontrollierte Simulationen durch, wobei du jeweils eine der Alternativen vorge gibst und so lange Indizien anforderst, bis die Wahrscheinlichkeit der vorgegebenen Alternative auf 98 % angewachsen ist. Drucke die Protokolle als Tabelle und Graphik.
d) Führe eine vollständige Simulation durch. Fordere Indizien an, bis die Wahrscheinlichkeit einer Alternative auf 80 % angewachsen ist. Riskiere dann eine Entscheidung.

Experiment 3 (S. 183)

- 4 a) Erstelle eine Datei EXP3.BAY zu Experiment 3 mit den drei Alternativen ss, sw, ww und den zwei Indizien schwarz, weiß. Benutze die Hotkeys „S“ und „W“.
b) Begleite ein reales Experiment mit dem Programm BAYES.
c) Führe drei kontrollierte Simulationen durch, wobei du jeweils eine der Alternativen vorge gibst und so lange Indizien anforderst, bis die Wahrscheinlichkeit der vorgegebenen Alternative auf 99 % angewachsen ist.

Tabelle zur Datei VIERMUENZ

		Frank	Jean	Arndt	Experi	Binom
a priori Wk. ⇒		0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
0 mal Kopf	0	0,2	0,1	0,05	0,06	0,0625
1 mal Kopf	1	0,2	0,25	0,2	0,24	0,25
2 mal Kopf	2	0,2	0,3	0,5	0,4	0,375
3 mal Kopf	3	0,2	0,25	0,2	0,24	0,25
4 mal Kopf	4	0,2	0,1	0,05	0,06	0,0625

Fig.

Datei VIERMUENZ laden

- 5 Starte das Programm BAYES, lade die Datei VIERMUENZ. Diese Datei enthält fünf verschiedene Schätzungen der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man beim Wurf von vier Münzen 0, 1, 2, 3, 4 mal Kopf erhält. Die ersten drei Schätzungen stammen von Schülern, die noch nichts über Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört haben, die vierte Schätzung wurde nach 200 Experimenten abgegeben, die fünfte ist „die richtige“ Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Binomialverteilung. Führe eine kontrollierte Simulation durch, wobei die Indizien durch die Binomialverteilung erzeugt werden sollen. Wie viele Indizien musstest du anfordern, bevor die a posteriori Wahrscheinlichkeit der Binomialverteilung erstmals 80 % erreichte? Experimentiere auch mit anderen a priori Wahrscheinlichkeiten.

Entscheiden mit Computerhilfe*)



Programm BAYES
Datei 5_SOCKEN laden

1 Socken Mirjam hat fünf Socken mit je vier roten und weißen Kugeln in unterschiedlichen Mischungsverhältnissen gefüllt. Sie wählt zufällig eine Socke und zieht daraus eine weiße Kugel. Die Kugel wird zurückgelegt. Nach gründlichem Mischen zieht sie wieder weiß.

- a) Für welche Socke spricht das Indiz „ww“ am meisten? Zeichne ein Bayes-Diagramm und berechne die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der fünf Alternativen.
- b) Kontrolliere dein Ergebnis mit Hilfe des Programms BAYES.
- c) Führt das Experiment in der Klasse durch: Einer wählt zufällig eine Socke, zieht daraus mit Zurücklegen und nennt stets die Farbe der gezogenen Kugel. Versucht mit Hilfe des Programms BAYES herauszufinden, aus welcher Socke gezogen wird.

		rot	weiß
Socke 1	wwww	0	1
Socke 2	wwwr	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
Socke 3	wwrr	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
Socke 4	wrrr	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
Socke 5	rrrr	1	0

Fig. 1

Programm BAYES
Datei MINIMAX laden

2 Minimax Dorothea wirft zwei Würfel, einen roten und einen weißen. Als Ergebnis des Doppelwurfs nennt sie entweder stets **Min**: die kleinere Augenzahl oder stets **Rot**: die Augenzahl des roten Würfels oder stets

Max: die größere Augenzahl.

Die Regeln Min, Rot, Max werden jeweils mit der gleichen a priori Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ verwendet. Dorothea legt die Regel anfangs durch Ziehen einer Karte fest. Man will herausfinden, welche Regel Dorothea benutzt.

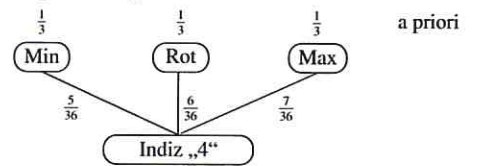
- a) Kontrolliere die angegebenen Wahrscheinlichkeiten der Augenzahl 4 (5, 6) bei den Regeln Min, Rot, Max.
- b) Dorothea würfelt zweimal. Sie nennt „4“ und „5“. Berechne die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der drei Regeln.
- c) Kontrolliere mit dem Programm BAYES.
- d) Klassenexperiment: Einer übernimmt

„Dorotheas“ Rolle. Der Rest der Klasse versucht mit Hilfe des Programms BAYES herauszufinden, welche Antwortregel benutzt wird. Lasst „Dorothea“ würfeln, bis die Wahrscheinlichkeit einer Alternative erstmals über 80 % angestiegen ist. Entscheidet dann mit Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner als 20 % und kontrolliert die Entscheidung.

e) Führe eine „vollständige Simulation“ solange durch, bis die Wahrscheinlichkeit einer Alternative erstmals über 80 % angewachsen ist. Riskiere dann die Entscheidung mit Irrtumswahrscheinlichkeit < 20 %. Wie viele Fehlentscheidungen hattest du bei 10 Simulationen?

Augen	1	2	3	4	5	6
Min	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
Rot	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$
Max	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Bayes – Diagramme



a posteriori

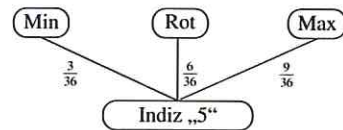


Fig. 2

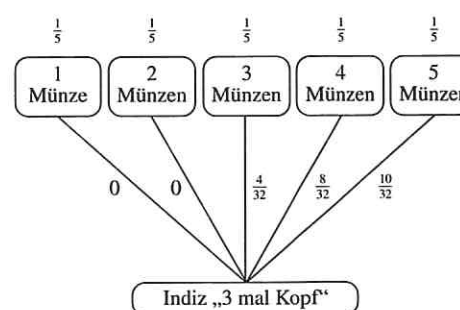
*) Wir benutzen das Programm BAYES. Genauso sinnvoll ist der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms. Man kann die Thematik gut mit einer Lerneinheit zur Informationstechnologischen Grundbildung koppeln.

Programm BAYES
Datei GELDBEUT laden

3 Geldbeutel Man weiß nicht, ob Ursula ihren Geldbeutel mit 1, 2, 3, 4 oder 5 Münzen gefüllt hat. Alle Füllungen sind a priori gleich wahrscheinlich. Sie wirft alle Münzen gleichzeitig und sagt nur, wie viele Münzen „Kopf“ zeigen.

- Kontrolliere die angegebenen Wahrscheinlichkeiten für 3 (4; 5) mal Kopf, indem du alle 8 (16; 32) möglichen „Kopf-Zahl-Kombinationen“ aufschreibst.
- Beim ersten Wurf erhält Ursula „3mal Kopf“. Berechne die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der fünf Füllungen.
- Kontrolliere mit dem Programm BAYES.
- Führt das Experiment in der Klasse durch. Einer übernimmt Ursulas Rolle. Der Rest der Klasse versucht mit Hilfe des Programms herauszufinden, wie viele Münzen „Ursula“ verwendet. Lasst „Ursula“ so lange werfen, bis die Wahrscheinlichkeit einer Alternative auf über 80 % angewachsen ist. Überprüft eure Entscheidung.
- Führe eine „vollständige Simulation“ so lange durch, bis die Wahrscheinlichkeit einer Alternative erstmals über 80 % angewachsen ist. Riskiere dann die Entscheidung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner als 20 %. Wiederhole dieses Experiment fünfmal.
- Wie viele Fehlentscheidungen kamen bei insgesamt 100 Simulationen vor?

Münzen	1	2	3	4	5
0 mal K	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
1 mal K	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{32}$
2 mal K	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{10}{32}$
3 mal K	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{32}$
4 mal K	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{32}$
5 mal K	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$



Fig

4 Chips Julia hat 10 Chips. 5 sind beiderseitig weiß (ww), 2 sind beiderseitig schwarz (ss). Die übrigen 3 Chips sind auf einer Seite schwarz, auf der anderen Seite weiß (sw).

- Julia wählt zufällig einen Chip und wirft ihn dreimal. Er landet stets auf „weiß“. Wie groß ist die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen ww-Chip handelt?
- Kontrolliere dein Ergebnis mit dem Computerprogramm BAYES.
- Klassenexperiment: Einer wählt zufällig einen Chip, wirft ihn wiederholt und teilt nach jedem Wurf die gefallene Farbe mit. Der Rest der Klasse versucht mit Hilfe des Programms BAYES herauszufinden, welche Chipsorte geworfen wird.

Programm BAYES
Datei CHIP532 laden

Dieses Experiment kann man auch mit verschiedenen beschrifteten Würfeln, Holzquadern oder den „Riemer-Würfeln“ (Klett, 70993) durchführen.

5 Laplacewürfel, Legoquader

Wir wollen herausfinden, ob Jens mit einem Würfel, einem Lego-Vierer oder einem Lego-Achter würfelt. Alle drei „Würfel“ sind a priori gleich wahrscheinlich.

- Jens erhielt in zwei Würfeln die Augenzahlen 1 und 2. Wie groß sind die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten der drei Würfeltypen?
- Kontrolliere dein Ergebnis mit dem Programm BAYES.
- Klassenexperiment: Einer wählt zufällig einen der drei Würfeltypen und teilt nach jeder Wurf die gefallene Augenzahl mit. Der Rest der Klasse versucht mit Hilfe des Programms BAYES herauszufinden, welcher Würfeltyp verwendet wird.
- Führe eine „vollständige Simulation“ durch. Lass den Computer so lange arbeiten, bis die Wahrscheinlichkeit eines „Würfels“ mindestens 80 % beträgt und riskiere dann die Entscheidung. Wie viele Fehlentscheidungen kamen bei 20 Simulationen vor?

	1	2	3	4	5	6
Laplace	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Vierer	7,5 %	7,5 %	43 %	27 %	7,5 %	7,5 %
Achter	11 %	1,5 %	45 %	30 %	1,5 %	11 %

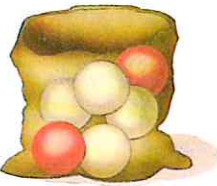
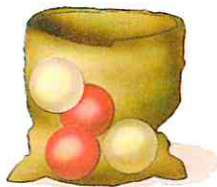
Fig

Programm BAYES
Datei LAPLEG48 laden

Beim Würfeln muss der Becher auf den Tisch gestülpt werden.

Wenn nichts anderes gesagt wird, dann sollten die Alternativen a priori gleich wahrscheinlich sein.

Programm BAYES
Datei RUECKLEG
– Reales Experiment
Begleiten
– Vollständige Simulation



6 Ziehen mit/ohne Zurücklegen

Vor Versuchsbeginn muss sich Anne entscheiden, ob sie aus einem Beutel mit oder ohne Zurücklegen ziehen wird. Der Beutel enthält 2 weiße und 2 rote Kugeln. Anne muss zweimal ziehen und sagen, wie viele Kugeln rot waren. Das Experiment kann beliebig oft wiederholt werden. So findet man heraus, ob Anne stets mit oder stets ohne Zurücklegen zieht.

- a) Kontrolliere die angegebenen Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse 0, 1, 2 rote Kugeln durch eine eigene Rechnung.
b) Beim ersten Doppelzug erwischte Anne keine, beim zweiten Doppelzug zwei rote Kugeln. Spricht dieses Indiz „02“ eher für ein Ziehen mit oder eher für ein Ziehen ohne Zurücklegen? Berechne die a posteriori Wahrscheinlichkeiten der beiden Strategien.
c) Kontrolliere dein Ergebnis mit dem Programm BAYES.
d) Führe das Experiment in der Klasse durch. Einer wählt zufällig eine Strategie und teilt nach jedem Zug die Zahl der gezogenen roten Kugeln mit. Der Rest der Klasse versucht mit Hilfe des Programms BAYES herauszufinden, wie gezogen wird.
e) Führe eine „vollständige Simulation“ des Experiments durch. Fordere so lange Indizien an, bis die Wahrscheinlichkeit einer Strategie erstmals über 88 % angewachsen ist und riskiere dann eine Entscheidung mit weniger als 12 % Irrtumswahrscheinlichkeit.
f) Wie viele Fehlentscheidungen kamen bei insgesamt 100 Simulationen vor?

gezogene rote	0	1	2
mit Zurücklegen	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$
ohne Zurücklegen	$\frac{1}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{1}{12}$

Fig. 1

7 Variation zu Aufgabe 6

Man zieht zweimal aus einem Beutel mit vier weißen und zwei roten Kugeln. Entweder zieht man stets mit oder stets ohne Zurücklegen. Als Ergebnis („Indiz“) gilt die Anzahl der roten Kugeln.

- a) Berechne die fehlenden Wahrscheinlichkeiten für 1 und 2 rote Kugeln, wenn man mit bzw. ohne Zurücklegen arbeitet.
b) Mit Hilfe der bayesschen Regel soll man anhand der Indizien herausfinden, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird. Erstelle dazu eine neue Datei AUF7 mit den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten und führe zwei kontrollierte Simulationen durch, wobei einmal die Alternative „mit Zurücklegen“, einmal die Alternative „ohne Zurücklegen“ vorgegeben wird. Wie viele Indizien mussten angefordert werden, bevor die vorgegebene Alternative erstmalig die Wahrscheinlichkeit 95 % erreichte?

	0r	1r	2r
mit Zurücklegen	$\frac{4}{9}$		
ohne Zurücklegen	$\frac{2}{5}$		

Fig. 2

8 Wie viele Kugeln?

Man zieht zweimal **ohne** Zurücklegen entweder aus einem Beutel mit zwei weißen und zwei roten oder aus einem Beutel mit vier weißen und vier roten Kugeln.

Als Versuchsergebnis (Indiz) gilt die Zahl der roten Kugeln. Das Experiment wird

stets mit dem gleichen Beutel wiederholt. Aus den Indizien soll mit Hilfe des Programms BAYES erschlossen werden, welcher Beutel verwendet wird.

- a) Berechne die in der Tabelle fehlenden Wahrscheinlichkeiten und erstelle eine neue Datei KUGZAHL zur Lösung des Problems mit dem Programm BAYES.
b) Führe 10 „kontrollierte Simulationen“ durch, wobei du fünfmal die erste Alternative und fünfmal die zweite Alternative vorgibst. Wie viele Indizien wurden benötigt, bis sich die vorgegebene Alternative mit 99%iger Wahrscheinlichkeit durchgesetzt hat?

Ziehen ohne Zurücklegen

	0r	1r	2r
wwrr	$\frac{1}{6}$		
wwwrrrr	$\frac{3}{14}$		

Fig. 3

Programm BAYES
Datei KUGZAHL
selbst erstellen,
– Kontrollierte Simulation
– Vollständige Simulation



Rückblick

Alternativen, Indizien

In Situationen der Unsicherheit ordnet man den möglichen Alternativen Wahrscheinlichkeiten zu. Wenn anschließend ein Indiz beobachtet wird, das durch eine Alternative wahrscheinlicher hervorgerufen wird als durch die anderen, dann stützt das Indiz diese Alternative. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Alternative zutrifft, steigt. Die anfänglichen Wahrscheinlichkeiten heißen a priori Wahrscheinlichkeiten, die im Anschluss an die Beobachtung möglicherweise geänderten Wahrscheinlichkeiten heißen a posteriori Wahrscheinlichkeiten der Alternativen.

Totale Wahrscheinlichkeit

Die totale Wahrscheinlichkeit eines Indizes ist die Wahrscheinlichkeit, mit der man das Indiz erwartet. Man addiert die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade im Baumdiagramm, die über die verschiedenen Alternativen zum Indiz führen.

Bayessche Regel

Man erhält die **a posteriori** Wahrscheinlichkeit einer Alternative, indem man die Wahrscheinlichkeit des **zugehörigen** Pfades durch die totale Wahrscheinlichkeit des beobachteten Indizes teilt.

$$\begin{aligned} & \text{a posteriori Wahrscheinlichkeit einer Alternative} \\ &= \frac{\text{Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Pfades}}{\text{totale Wahrscheinlichkeit des Indizes}} \end{aligned}$$

Mehrstufige Indizien

Wenn man mehrere Indizien beobachtet, kann man diese zu einem mehrstufigen Indiz zusammenfassen. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, die von den Alternativen zum Indiz führen, benutzt man die Pfadregel.

Man kann auch mehrere Bayes-Diagramme hintereinander schalten und die a posteriori Wahrscheinlichkeiten als a priori Wahrscheinlichkeiten des folgenden Diagramms verwenden.

Irrtumswahrscheinlichkeit

Wenn nach mehreren Indizien die Wahrscheinlichkeit einer Alternative so groß geworden ist, dass man sich für diese Alternative entscheidet, ist die Summe der übrigen a posteriori Wahrscheinlichkeiten die Irrtumswahrscheinlichkeit.

1. Zufällige Wahl eines Beutels
2. Zweimal Ziehen ohne Zurücklegen

Erster Zug liefert „r“

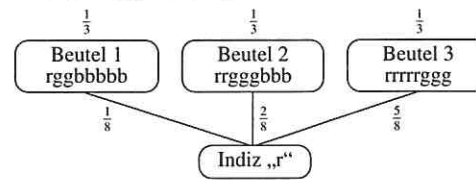


Fig.

Das Indiz „r“ stützt Beutel 3

Pfade zum Indiz „r“	a posteriori
Pfad 1: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$	Beutel 1: $\frac{1}{8}$
Pfad 2: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{24}$	Beutel 2: $\frac{2}{8}$
Pfad 3: $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$	Beutel 3: $\frac{5}{8}$
	$\frac{8}{24}$

Zweiter Zug liefert „g“

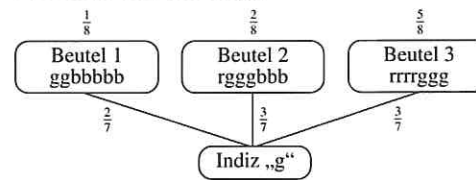


Fig.

g stützt Beutel 2 und 3 gleichermaßen.

Pfade zum Indiz „g“	a posteriori
Pfad 1: $\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{56}$	Beutel 1: $\frac{2}{23}$
Pfad 2: $\frac{2}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{56}$	Beutel 2: $\frac{6}{23}$
Pfad 3: $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$	Beutel 3: $\frac{15}{23}$
	$\frac{23}{56}$

Rechnung mit zweistufigem Indiz „rg“

Pfade zum Indiz „rg“	a posteriori
Pfad 1: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{168}$	Beutel 1: $\frac{2}{23} \approx 8,7\%$
Pfad 2: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{168}$	Beutel 2: $\frac{6}{23} \approx 26,1\%$
Pfad 3: $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{168}$	Beutel 3: $\frac{15}{23} \approx 65,2\%$
	$\frac{23}{168}$

Würde man sich jetzt für Beutel 3 entscheiden, wäre die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums 34,8%.

Aufgaben zum Üben und Wiederholen

1 Iren seien mit 60%iger Wahrscheinlichkeit rothaarig, Isländer seien mit 30%iger Wahrscheinlichkeit rothaarig. An der Ticketkontrolle werden nacheinander die Personen einer Reisegruppe abgefertigt, die sämtlich alle Iren oder alle Isländer sind. Der Kontrolleur registriert beiläufig auch die Haarfarbe: rothaarig – nicht rothaarig – rothaarig – rothaarig (Indiz). Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine irische Reisegruppe, wenn beide Alternativen a priori gleich wahrscheinlich sind?

2 Herr Haptu fährt in 70 % aller Fälle mit dem Rad zur Arbeit, in 25 % aller Fälle mit dem Bus und nur in 5 % aller Fälle mit dem Auto. Wenn er Rad fährt, kommt er mit 99%iger Wahrscheinlichkeit pünktlich. Benutzt er den Bus, kommt er mit 80%iger Wahrscheinlichkeit pünktlich. Wenn er Auto fährt, ist er nur mit 60%iger Wahrscheinlichkeit pünktlich. Heute ist er zu spät gekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er Auto gefahren?

3 Heike wählt zufällig einen der drei Beutel und zieht ohne Zurücklegen drei Buchstaben, die sie in der gezogenen Reihenfolge zu einem Wort zusammenfügt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Beutel III gezogen hat, wenn sie das folgende Wort erhielt?
a) „OMA“ b) „MAO“ c) „OMO“

4 80 % aller Besucher des Wochenmarktes sind weiblich. Raymond steht in einer Warteschlange. Vor ihm trägt jemand einen Blazer, kurzes Haar und Ohrring (keinen Blazer, langes Haar und Ohrring). Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Frau? Benutze die (modeabhängigen) Wahrscheinlichkeiten der Tabelle.

5 Uschi wirft einen Laplace-Würfel. Piraye wirft fünf Münzen, zählt, wie viele auf „Kopf“ gefallen sind, und addiert 1 hinzu. Beide erhalten als Versuchsergebnis „Augenzahlen“ zwischen 1 und 6. Beide führen ihr Experiment dreimal durch und protokollieren ihre Ergebnisse. Auf einem Zettel, der a priori mit gleichen Wahrscheinlichkeiten von Uschi und Piraye stammt, stehen drei Augenzahlen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um ein Versuchsprotokoll von Uschi handelt.

a) 3 – 4 – 3 b) 2 – 1 – 6 c) 1 – 1 – 1

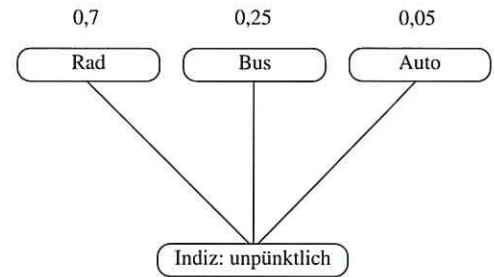


Fig. 1

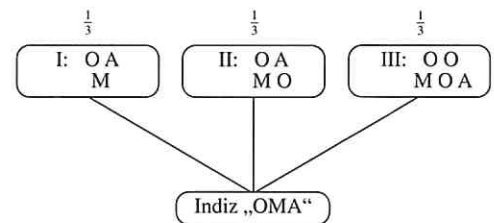


Fig. 2

	Blazer	langes Haar	Ohrring
männlich	20 %	3 %	12 %
weiblich	5 %	10 %	30 %

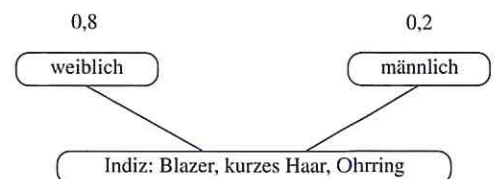
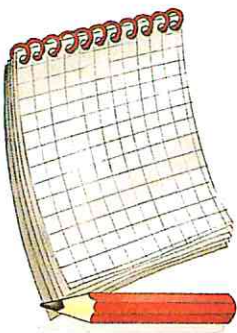


Fig. 3

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Uschi	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Piraye	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Fig. 4



Die Lösungen zu den
Aufgaben dieser Seite
findest du auf Seite 203.