

Mit Zufall durch die Schule –
Wahrscheinlichkeit

Herrn Dr. Wolfgang Riemer, StD
August-Bebel-Str. 80
50259 Pulheim

Stark-Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG, Lillienthalstr. 2, 85399 Hallbergmoos
ZKZ 20353, Entgelt bezahlt, PVSt, Deutsche Post

Klassenstufen: 9–13

Leitidee: Daten und Zufall

Kompetenzen:

mathematisch argumentieren;
mathematisch kommunizieren

e

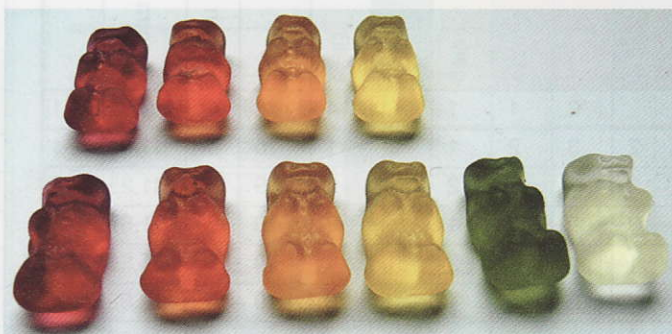


Abb. 1: Minibären leben in „Familien“ (kleinen Tütchen) mit 12 g Sollgewicht. Etwa 21 dieser Familien bewohnen einen großen Beutel. Sie bilden eine „Sippe“ mit 250 g Sollgewicht. Die abgebildete Bärfamilie aus 10 Mitgliedern war mit 11,96 g leicht untergewichtig, enthielt aber alle sechs Farben. Das Eichlogo „e“ hinter der Gewichtangabe 12 g besagt: Nur in 2 % darf das Gewicht von 11 g unterschritten werden.

Gummibärenforschung

Wolfgang Riemer und Raphaela Sonntag

Gummibärenforschung ist witzig und spannend. Ausgewählte Aspekte passen in eine Doppelstunde und decken mit den Merkmalen Farbe, Gewicht und Geschmack alle Bereiche des Statistikunterrichts von Klasse 6 bis zum Abitur ab. Sie kann in idealer Weise das einlösen, was Heinrich Winter 1995 in seiner ersten Grunderfahrung eingefordert hat: „Der Mathematikunterricht sollte anstreben, Erscheinungen der Welt in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen.“

Einleitung

Klasse 6b: Charlotte hat zum Geburtstag „Gummibären für alle“ mitgebracht. Da Geometrie auf dem Programm steht und sauberes Zeichnen ohne klebrige Finger besser geht, werbe ich für eine Gummibären-Feier erst nach getaner Arbeit. Doch während die Kinder zeichnen, fällt mein Blick immer wieder auf die farnefrohen Tüten. Und letztendlich folgen auf Charlottes Geburtstagsfeier einige Stunden zur beschreibenden Statistik mit Strichlisten, Mittelwerten, Diagrammen und Boxplots.

Im gleichzeitig laufenden Abiturskurs bieten die gewonnenen Daten einen willkommenen Einstieg in stochastische Prozesse und die beurteilende Statistik. Dass die Abiturienten die Gelegenheit zu einer „Kontrolluntersuchung“ bekommen, versteht sich von selbst. Aber überzeugen Sie sich: Gummibären enthalten so viel Statistik, dass man beim Nachdenken darüber fast das Essen vergessen könnte.

Merkmal Farbe

Nach einer Umfrage bevorzugen nur wenige Schüler weiß und grün. Am beliebtesten sind rot und orange. Nach Angaben der Hersteller werden die Farben aber „bunt gemischt“.

- Bedeutet das: Alle Farben kommen den Kinderwünschen zum Trotz gleich häufig vor?
- Wie viele Bären leben in den Tütchen zusammen?
- Wie groß ist die Chance, dass ein Tütchen alle sechs Farben erhält?

Nach dem Öffnen einzelner Tütchen mag man nicht so recht an die Gleichverteilung der Farben glauben. Und **genau dieser Zweifel** macht die Untersuchung authentisch. Fünf Beutel mit ca. 105 Tütchen werden arbeitsteilig ausgezählt und gewogen. Im Unterricht der Klasse 6 plakatiert jedes Team seine Ergebnisse, sodass auch Zufallsschwankungen sichtbar werden (wie in Abb. 3).

Bären je Tütchen	8	9	10	11	12
	0,9 %	29,2 %	55,7 %	12,3 %	1,9 %

Farben je Tütchen	1	2	3	4	5	6
	0,0 %	0,0 %	3,7 %	15,7 %	47,2 %	33,3 %

- Überraschenderweise zeigen die Abb. 2–3, dass man keinen Grund hat, die Annahme der Gleichverteilung zu bezweifeln. Die Chi-Quadrat Testgröße, die man im LK theoretisch und im GK mit Simulation untersuchen kann [1] liegt bei allen fünf Beuteln unter der kritischen 95%-Grenze 11.
- Fast alle Tütchen enthalten zwischen 9 und 11 Bären.
- Etwa die Hälfte der Tütchen enthält 5 Farben. Um sechs Farben zu erwischen, braucht man schon „Glück“.

Wie viel Glück genau, beantwortet man mit einem stochastischen Prozess (im NRW-Abitur auch im GK obligatorisch), dessen Zustände der Anzahl der in einer Tüte auftretenden Farben entsprechen: In den 10er-Tüten beträgt sie 27,2 %, in 11er-Tüten 35,6 % ... und in Tüten mit 40 Bären läge sie bei 99,6 % (Abb. 5).

Merkmal Gewicht

Durch die Gewichtsangabe 12 g werden die Tütchen für statistische Untersuchungen noch interessanter, als sie ohnehin schon sind. Die Tütchen sollen 12 g wiegen, alle zusammen im Beutel 250 g. Müsstes es dann 21 Tütchen mit 252 g sein und man bekäme stets 2 g geschenkt?

Handelt es sich hier um Mindestgewichte, den Median oder ein arithmetisches Mittel?

Die Antwort lässt sich an den Abbildungen 6 und 7 schon in der Orientierungsstufe ablesen: Sowohl die Mediane als auch die arithmetischen Mittelwerte pendeln um das Sollgewicht 12 g. Die Angabe 250 g auf den Beuteln ist ein Mindestgewicht.

Familie	dunkelrot	hellrot	orange	gelb	grün	weiß	Bären	Farben	Gramm	
1		2	1	1		4	8	4	9,61	-1
2	2	3	2	1	1	1	10	6	11,58	-1
3	2		2	2	1	2	9	5	11,25	-1
4	3	2	1	1		3	10	5	11,68	-1
5	1	4		2	1	1	9	5	11,55	-1
6		2	2	1	3	2	10	5	12,68	1
7	1	1	2	2	4		10	5	11,66	-1
8	4		2	1	1	2	10	5	11,61	-1
9	2	2	2	1	3		10	5	12,69	1
10	2	3	2	1	1	1	10	6	11,89	-1
11		2	2	1	4	1	10	5	12,22	1
12	2	1	2	1	1	3	10	6	11,95	-1
13	2	2	2	1	1	2	10	6	11,83	-1
14			3	3	2	2	10	4	11,97	-1
15		1	2	2	2	2	9	5	11,43	-1
16	1	1	2	2	1	2	9	6	10,73	-1
17	1	1	4	1	2	1	10	6	11,87	-1
18		1	1	2	3	3	10	5	12,03	1
19		1			5	3	9	3	10,84	-1
20	2		1		2	5	10	4	12,02	1
21	6		1	1	1		9	4	10,52	-1
22	2	3	2	3		1	11	5	13,08	1
Σ	33	32	38	30	39	41	202		256,69	-10
%	16%	16%	19%	15%	19%	20%	100%		m 11,76 g μ [^] 11,67 g σ [^] 0,76 g	

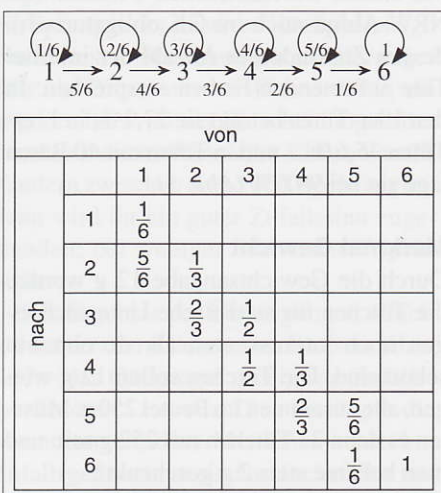
Abb. 2: Dieser Beutel aus 22 Tütchen wog „nackt“ (ohne Tüte) 256,69 g. 16 Tütchen waren untergewichtig, 6 wogen zu viel.

Beutel	Tütchen	dunkelrot	hellrot	orange	gelb	grün	weiß	Bären	chi ²	Gramm	h(X > 12 g)	Median 12 g bezweifeln
1	21	35	36	43	43	27	26	210	7,8	253	0,429	nein
2	21	37	44	32	28	29	33	203	5,2	259	0,619	nein
3	22	39	37	41	38	33	31	210	2,4	268	0,364	nein
4	22	36	36	30	40	38	36	207	2,0	263	0,333	nein
5	22	33	32	38	30	39	41	202	3,5	257	0,273	ja
Σ	108	180	185	184	179	166	167	1032	2,8	1299	0,402	ja

Abb. 3: Bei der Produktion wird keine Farbe bevorzugt. letzte Spalte: Tütchen-Median 12 g bezweifeln?

	1	2	3	4	5	6
1	100,0%					
2	16,7%	83,3%				
3	2,8%	41,7%	55,6%			
4	0,5%	16,2%	55,6%	27,8%		
5	0,1%	5,8%	38,6%	46,3%	9,3%	
6	0,0%	2,0%	23,1%	50,2%	23,1%	1,5%
7	0,0%	0,7%	12,9%	45,0%	36,0%	5,4%
8	0,0%	0,2%	6,9%	36,5%	45,0%	11,4%
9	0,0%	0,1%	3,6%	27,80%	49,7%	18,9%
10	0,0%	0,0%	1,9%	20,3%	50,6%	27,2%
11	0,0%	0,0%	0,9%	14,5%	49,0%	35,6%
12	0,0%	0,0%	0,5%	10,1%	45,6%	43,8%
40	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,4%	99,6%
gew. m	0,0%	0,0%	2,3%	21,7%	50,0%	26,0%
exp	0,0%	0,0%	3,7%	15,7%	47,2%	33,3%

Abb. 5: Folge der Zustandsverteilungen

Abb. 4: Das Inspizieren eines Tütchens entspricht einer Irrfahrt im Zustandsdiagramm mit der hier abgebildeten Übergangsmatrix. Die Zustands-Nummer ist die Anzahl bisher gezogener Farben: Der erste Bär liefert die erste Farbe, man ist im Startzustand „1“. Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ erhält man beim zweiten Bär eine zweite Farbe (Wechsel in Zustand „2“), mit $\frac{1}{6}$ verbleibt man in 1 usw.

Im LK könnte man wegen des Eichzeichens „e“ versuchen, das Tütchengewicht durch die Normalverteilung $\varphi_{12;0,5}$ zu „modellieren“. Dann wird nämlich wegen der 2σ -Regel die Eichnorm mit $P(X < 11) \approx 0,02$ gerade noch eingehalten, ohne dass der Produzent Ware verschenken müsste. *Kasten 1* und die Aufgaben der *Online-Ergänzung* dokumentieren, wie spannend die Untersuchung des Normalverteilungsmodells im Kontext der Tütchengewichte tatsächlich ist.

Das Tütchengewicht und der Vorzeichentest zur Kontrolle des Medians

Das „Eins-durch-Wurzel-n-Gesetz“ nutzt man – als Anwendung der 2σ -Regel –, um von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit (zweiseitiger Binomialtest auf dem 4,6%-Signifikanzniveau) zu schließen, wie folgt:

Bezweifle bei einer Bernoullikette die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,5$, wenn die relative Häufigkeit $h = \frac{\bar{X}}{n}$ außerhalb des 2σ -Intervalls $[0,5 - (\frac{1}{\sqrt{n}}); 0,5 + (\frac{1}{\sqrt{n}})]$ liegt.

Damit kann man die Hypothese H_0 : „12 g ist der Median der Tütchengewichte“ dem Vorzeichentest unterziehen, der wie folgt arbeitet: Wenn H_0 stimmen würde, wäre beim Wiegen die Anzahl der Vorzeichen „+“ (Tütchengewicht $X > 12$ g) $B_{n;0,5}$ binomialverteilt. Denn ein Tütchengewicht liegt nach Definition mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 über dem angenommenen Median. Dabei ist n die Anzahl der gewogenen Tütchen. Falls die Analyseswaage genau 12,00 g anzeigt, zählt das Tütchen nicht mit (das passierte einmal). Um bei den insgesamt 107 Tütchen den Median 12 g bezweifeln zu können, müsste die relative Häufigkeit von „+“ außerhalb von

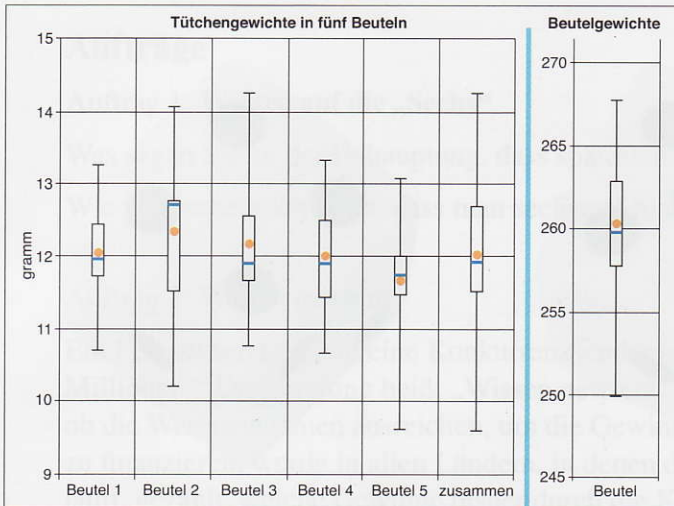


Abb. 6: Boxplots Tütchen und Beutelgewichte (Mittelwerte rot)

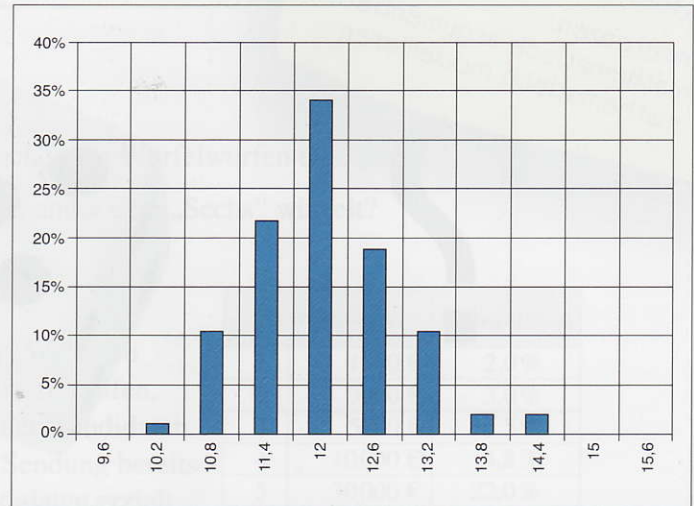
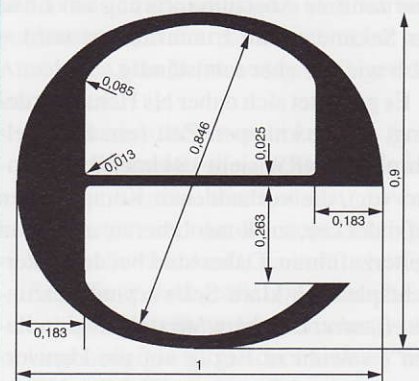


Abb. 7: Verteilung der Gewichte von 105 Tütchen

$$\left[0,5 - \left(\frac{1}{\sqrt{107}}\right), 0,5 + \left(\frac{1}{\sqrt{107}}\right)\right] \\ \approx [0,403; 0,597] \text{ liegen.}$$

Das ist (ganz knapp) der Fall. Man hat also Grund, an der Hypothese $m = 12$ g zu zweifeln. Das liegt vermutlich daran, dass der Einkäufer durch Nutzen einer Gemüswaage (!) versuchte, schwere Beutel (teilweise mit 22 Tütchen) zu erwischen. Bei diesen hätten wohl die laut Packung enthaltenen „etwa 21 Tütchen“ keine 250 g Gummibären geliefert. Die Bevorzugung schwerer Beutel führt also tendenziell zu leichten Tütchen und das „merkt“ der Test.

Das „e“ hinter den Gewichtsangaben ist ein Eichzeichen, das garantiert: Höchstens 2 % der Verpackungen unterschreiten das Sollgewicht (12 g) um mehr als 9 %, d. h. höchstens 2 % der Tütchen wiegen weniger als 11 g (Detaillierte Informationen zur Fertigverpackungsrichtlinie 76/211/EWG finden Sie in den *Online-Ergänzungen*). Tatsächlich wurde die Toleranzgrenze bei zwei großen Stichproben in ca. 20 % (statt der erlaubten 2 %) unterschritten.



Kasten 1: Das Eichzeichen „e“

Vertrauensintervall für den Median des Tütchengewichts

Zum Vertrauensintervall $[u; o]$ gehören alle die „hypothetischen“ Medianwerte, die man nach dem obigen Vorzeichentest nicht zu bezweifeln braucht. Die untere Grenze u dieses Intervalls bestimmt man also so, dass gerade noch weniger als 40,3 % von 108 (= 43,6), also 43 Tütchengewichte kleiner sind. Die Untergrenze ist damit das 44. Gewicht: $u = 11,85$ g. Entsprechend müssen 43 Gewichte größer als die Obergrenze des Vertrauensintervalls sein. Damit ist die Obergrenze o das $108 - 44 = 64$. Gewicht: $o = 12,99$ g.

Merkmal Geschmack

Nach Herstellerangaben schmecken verschiedenfarbige Bären unterschiedlich: Wahrheit oder Werbung? Auch das kann man durch statistische Tests prüfen. (Die Antwort ist ein klares „JA“. Die „Stunde Morgen“ bietet hierzu Hinweise und Kopiervorlagen. Der dort vorgestellte Permutationstest ist eine echte Herausforderung für jeden wahren Gummibärenfreund, mathematisch wie geschmacklich.

Rückblick

Gummibären sind emotional positiv besetzte Sympathieträger. Mit den Merkmalen Farbe, Geschmack und Gewicht kann man sie von Klasse 6 bis zum Abitur als sinnstiftende Botschafter der Statistik nutzen: Sie „machen Kinder froh und Mathelehrer sowieso“. Dabei ist es „Geschmacksache“, ob man mit Experimenten beginnt und daran Theorie entwickelt oder – anders herum – zuvor erarbeitete Theorie im Anwendungskontext belebt.

Die letzten Abschnitte verdeutlichen darüber hinaus:

Es lohnt, den Median nach Klasse 6/7 nicht einfach zu vergessen. Er lässt sich auch im GK wunderbar nutzen, um nur mit dem Vorzeichentest (Binomialverteilung zu $p = 0,5$) in Grundgedanken beurteilender Statistik einzusteigen.

Ergänzendes Aufgabenmaterial zur beurteilenden Statistik für Grund- und Leistungskurse (samt Lösungen und Originaldaten) bietet der Download zu diesem Artikel.

Literatur

Rierner, W.: *Bleistiftrollen: Beurteilen der Statistik aus dem Federmäppchen. Praxis der Mathematik in der Schule (PM) 43/2012*

Dass auch bei farbigen Schokolinsen die sechs Schokolinsenfarben gleichverteilt sind, liest man in Engel, J. / Vogel, M.: Von M & Ms und bevorzugten Farben. Stochastik in der Schule 25 (2005), S. 11–18

Verfasser/-innen

Dr. Wolfgang Rierner
ZfsL Köln, w.rierner@arcor.de
www.rierner-koeln.de

Raphaela Sonntag

Konrad-Adenauer-Gymnasium, Bonn
raphaela@sonntagsbox.de

Permutationen schmecken

Wolfgang Riemer und Raphaela Sonntag

Hör- und Geschmackstests sorgen seit Jahren für Motivation in der beschreibenden und beurteilenden Statistik. Dabei kommen wegen der Prüfungsrelevanz meist Binomialverteilungen zum Einsatz. Zwecks Horzonerweiterung soll hier *neben* dem Binomialmodell auch ein mathematisch anspruchsvolleres Permutations-Design für einen Gummibärchen-Geschmackstest erforscht und genutzt werden.



Gummibärchen sind für sensorische Tests sehr handlich. Die *Kopievorlage 2* zeigt, wie man sie in der beschreibenden Statistik nutzen kann. Ebenso sind sie geeignet, in der beurteilenden Statistik die praktische Relevanz von „Theorie“ aufzuzeigen. Versuch II behandelt die abiturrelevante Binomialverteilung. Die Theorie zu Versuch I ist anspruchsvoller, sie erschließt sich in der *Kopievorlage 1*. Ein Gummibären-Test ist auf jedem Schulfest ein Renner. Er öffnet der Statistik Tür und Tor.

Testbogen und weiterführende Literatur sind bei den Autoren per Mail erhältlich

Verfasser/-innen
Dr. Wolfgang Riemer
 ZfsL Köln
w.riemer@arcor.de
www.riemer-koeln.de

Raphaela Sonntag
 Konrad-Adenauer-Gymnasium Bonn,
raphaela@sonntagsbox.de



Kopievorlage 1

Trefferzahlen bei Zufallspermutationen

Die Zahlen 1; 2; 3; ...; 6, die für die sechs Farben von Gummibärchen stehen, werden zufällig permutiert. Die Anzahl der Zahlen, die dabei auf ihrem Ausgangsplatz landen („Treffer“) liegt zwischen 0 und 6. Von den $6! = 720$ Permutationen sind 265 fixpunktfrei (null Treffer). 264 liefern einen Treffer, nur eine Permutation liefert sechs Treffer (vgl. letzte Zeile der Tabelle). Die Tabelle zeigt auch die Trefferzahlen, wenn nur 1; 2; 3; 4 oder 5 Zahlen permutiert werden. Die ersten vier Zeilen lassen sich leicht kontrollieren, indem man alle Permutationen hinschreibt. Im Folgenden rechnet man rekursiv weiter:

- (1) Für die Anzahl fixpunktfreier Permutationen f_n von n Zahlen (null Treffer, erste Tabellenspalte) gilt:

$$f_n = (n-1) \cdot (f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (*)$$

Für $n = 5$ ergibt sich z. B. $44 = 4 \cdot (9 + 2)$, für $n = 6$ ergibt sich $265 = 5 \cdot (44 + 9)$.

Begründung für $n = 5$: Man unterscheidet

- (a) die fixpunktfreien Permutationen, bei denen 1 und k ($k > 1$) ihre Plätze tauschen und die restlichen drei Zahlen fixpunktfrei permutieren. Davon gibt es $4 \cdot f_3$ Stück und
 (b) solche, bei denen 1 auf einem Platz k landet, die „vertriebene Zahl“ aber nicht auf den nun freien Platz 1 darf und die übrigen nicht auf ihren Ursprungsplätzen landen dürfen. Davon gibt es aber $4 \cdot f_4$ Möglichkeiten. Zusammen erhält man mit $f_5 = 4 \cdot (f_3 + f_4)$ die obige Formel (*).

- (2) Die Anzahl $g_n(k)$ der Permutationen von n Zahlen mit k Fixpunkten erhält man mit $g_n(k) = \binom{n}{k} \cdot f_{n-k}$ [$g_6(3) = \binom{6}{3} \cdot f_3 = 20 \cdot 2 = 40$], denn für die k festbleibenden Plätze gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten und die restlichen $n - k$ Plätze müssen jeweils fixpunktfrei belegt werden.

6er-Permutation mit 2 Treffern:

1	2	3	4	5	6
3	2	5	4	6	1

wenn man 1, 2, ... Zahlen permutiert:

	0	1	2	3	4	5	6	
1	0	1						1
2	1	0	1					5
3	2	3	0	1				6
4	9	8	6	0	1			24
5	44	45	20	10	0	1		120
6	265	264	135	40	15	0	1	720

Gummibären schmecken

Versuch I: Ein blickdichtes Tütchen enthält sechs Gummibären, von jeder Geschmacksrichtung eines: Himbeere (dunkelrot), Erdbeere (hellrot), Orange (orange), Zitrone (gelb), Apfel (grün) und Ananas (weiß). Du verbindest deine Augen und ziehst ein Bärchen. Dein Partner notiert die gezogene Farbe im Testbogen und du versuchst, sie zu erschmecken. Auch die geschmeckte Farbe notiert dein Partner. Das Ganze wird wiederholt, bis das Tütchen leer ist. **Wenn du merkst, dass du dich bei einer gegebenen Antwort „verschmeckt“ hast, darfst du nachträglich korrigieren. Es müssen am Ende alle sechs Sorten genau einmal angekreuzt sein.** Dann werden die Treffer gezählt. Beim nächsten Tütchen werden die Rollen getauscht.

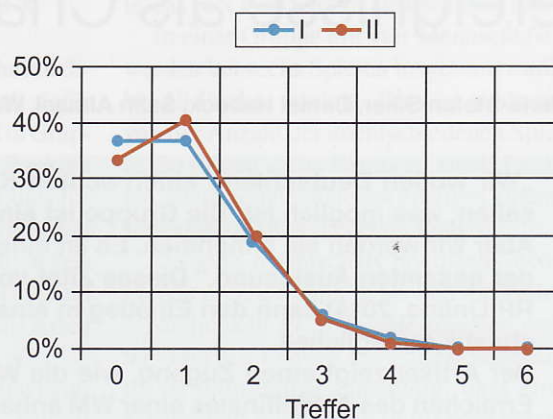
Versuch II (als Alternative zu I): Er funktioniert genau wie Versuch I, nur dass die sechs Bärchen zufällig einem **original verpackten** Mini-Tütchen entnommen werden. Man weiß bei diesem Versuch also **nicht**, wie viele Farben vertreten sind.

	gezogen						geschmeckt						Treffer
	dunkelrot: Himbeere	hellrot: Erdbeere	orange: Orange	gelb: Zitrone	grün: Apfel	weiß: Ananas	dunkelrot: Himbeere	hellrot: Erdbeere	orange: Orange	gelb: Zitrone	grün: Apfel	weiß: Ananas	
1													
2													
3													
4													
5													
6													
Σ													

- Untersuche für den ausgewählten Versuch durch Auswerten aller Daten, ...
 - (a) bei welcher Farbe die Trefferquote am höchsten ist;
 - (b) ob sich die Trefferquoten beim ersten bzw. letzten Bärchen unterscheiden;
 - (c) ob man sich verbessert, wenn man den Test wiederholt.
- Max ist davon überzeugt, dass Test II „schwieriger“ ist als Test I. Jana hält beide Tests für „gleich schwierig“. Welche Position vertrittst Du? Begründe Deine Meinung.

Theorie: Die letzte Zeile der folgenden Tabellen zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen ein Nullschmecker (jemand, für den alle Farben absolut gleich schmecken, der also nur raten kann) bei Versuch I bzw. II 0; 1; 2; ...; 6 Treffer erhalten müsste. Die darüber stehenden Zeilen gehören zu analogen Experimenten, bei denen nur 1; 2; 3; ... 5 Geschmacksrichtungen angeboten werden.

I	0	1	2	3	4	5	6	μ	σ
1	0,0%	100,00%						1	0
2	50,00%	0,00%	50,00%					1	1
3	33,33%	50,00%	0,00%	16,67%				1	1
4	37,50%	33,33%	25,00%	0,00%	4,17%			1	1
5	36,67%	37,50%	16,67%	8,33%	0,00%	0,83%		1	1
6	36,81%	36,67%	18,75%	5,56%	2,08%	0,00%	0,139%	1	1
II	0	1	2	3	4	5	6	μ	σ
1	0,00%	100,00%						1	0
2	25,00%	50,00%	25,00%					1	0,71
3	29,63%	44,44%	22,22%	3,70%				1	0,82
4	31,64%	42,19%	21,09%	4,69%	0,39%			1	0,87
5	32,77%	40,96%	20,48%	5,12%	0,64%	0,03%		1	0,89
6	33,49%	40,19%	20,09%	5,36%	0,80%	0,06%	0,002%	1	0,91



- Erkläre Gemeinsamkeiten und Unterschiede, insbesondere die 0%-Einträge in der oberen *Tabelle I*, und begründe, warum die untere *Tabelle II*, nicht aber die obere *Tabelle I* Binomialverteilungen enthält.
- Kontrolliere die ersten Zeilen der oberen *Tabelle I* durch Abzählen möglicher Ergebnisse.
- Simon möchte die Hypothese H_0 : „Ich bin nur ein Nullschmecker“ auf einem Signifikanzniveau von 5 % ablehnen. Wie viele Treffer müsste er dazu in der jeweiligen Testvariante erreichen? Wie hoch wäre dann die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit $p(„H_0 \text{ verwerfen“})$, obwohl H_0 gilt?
- Studiere *Kopiervorlage 1* und erläutere in einem Vortrag, wie man die letzte Zeile der oberen *Tabelle I* berechnen kann.