

## Chance und Risiko – Gewinn besiegt Wahrheit

Oft muss man sich im Leben zwischen Alternativen entscheiden. Wenn mit richtigen Entscheidungen Gewinnchancen und mit falschen Entscheidungen Verlustrisiken verbunden sind, dann kann man in die Zwickmühle geraten. Denn nicht immer lässt die Regel mit den meisten richtigen Entscheidungen auch den größten Gewinn bzw. den kleinsten Verlust erwarten. Diese Zusammenhänge werden an einem Ratespiel erforscht, das durch Gewinne und Verluste zum Gewinnspiel wird – und sich mit etwas Phantasie auf die Wirklichkeit übertragen lässt.

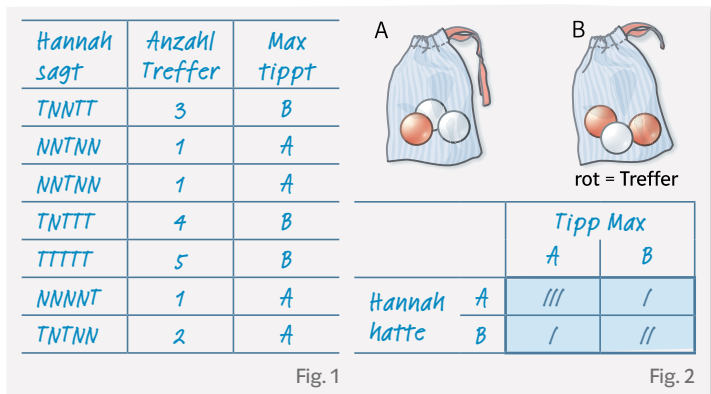
### 1 Ratespiel

Hannah wählt zufällig einen der Beutel A oder B. Bei A ist die Trefferwahrscheinlichkeit  $p = \frac{1}{3}$ , bei B ist sie  $p = \frac{2}{3}$ . Dann zieht sie (mit Zurücklegen und Mischen vor dem nächsten Zug) fünfmal hintereinander aus ihrem Beutel und nennt die Ergebnisse (Treffer T bzw. Niete N), z. B. TNNTT. Ihr Spielpartner muss nun tippen, ob Hannah aus Beutel A oder Beutel B gezogen hat.

a) Max tippt wie in Fig. 1 immer nach der gleichen Strategie „gesunder Menschenverstand“. Erläutert, wie diese Tippstrategie funktioniert.

b) Bestimmt in Partnerarbeit durch 20-maliges Spielen und Ausfüllen einer Vierfeldertafel wie in Fig. 2 einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass Max nach den 5 Zügen richtig tippt.

c) Fasst die Versuchsergebnisse der ganzen Klasse auf einem gemeinsamen Plakat zusammen. Verbessert eure Schätzung. Vergleicht eure Schätzung mit den Ergebnissen aus Fig. 3.



		Tipp Max		
		A	B	
Hannah hatte	A	124	27	151
	B	36	113	149
		160	140	300

Fig. 3

### 2 Gewinnspiel

Dadurch, dass man richtige Tipps belohnt und falsche bestraft, wird das Rate- zu einem Gewinnspiel (vgl. nebenstehende Gewinnregeln).

a) Schätzt ab, welchen Punktergebnis Max bei Gewinnregel 1 mit seiner Strategie des gesunden Menschenverstandes durchschnittlich pro Spiel erwarten kann. Nutzt die Versuchsergebnisse aus 1 c) bzw. Fig. 3.

b) Die Gewinnregel wird verschärft: Ein Fehltipp auf Beutel A wird richtig teuer. Er kostet nun 10 Punkte (Regel 2). Untersucht, ob man mit Max' Strategie des gesunden Menschenverstandes auf lange Sicht immer noch Gewinn machen kann.

c) Mara: „Es ist bei Regel 2 riskant, zu schnell auf Beutel A zu tippen. Man sollte mit solchen Tipps vorsichtig sein.“ Erläutert, was Mara meint. Schlägt „vorsichtigere“ Tippstrategien vor. Erprobt, ob sie mehr Gewinn versprechen.

**Gewinnregel 1:**  
Für jeden richtigen Tipp gewinnst du einen Punkt,  
für jeden falschen Tipp verlierst du einen Punkt.

**Gewinnregel 2:**  
Für jeden richtigen Tipp gewinnst du einen Punkt, für  
jeden falschen Tipp auf B verlierst du wieder einen Punkt.  
Wenn du aber auf A tippst, obwohl Hannah B hatte, also  
bei einem falschen Tipp auf A, verlierst du 10 Punkte.

### 3 Computersimulation

In der Tabellenkalkulation (Fig. 1) wird das Gewinnspiel 1000-mal simuliert. Man kann die Punkte, die man verliert, wenn man auf A tippt, obwohl B richtig ist, in Zelle I1 verändern. In Zelle H1 verändert man die Trefferzahl, bis zu der man auf A tippt. In Fig. 1 gilt  $H1 = 2$ , es wird also bei höchstens zwei Treffern auf A getippt. Fig. 1 simuliert also die Strategie von Max mit Gewinnregel 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Hannas	tippe auf A, falls Trefferzahl $\leq$						2	-10
2	Beutel	Ergebnisse					Treffer	Tipp	Punkte
3	A	T	N	T	N	N	2	A	1
4	B	T	T	T	T	N	4	B	1
5	A	N	N	N	T	N	1	A	1
6	A	N	T	T	T	N	3	B	-1
7	A	N	N	N	N	N	0	A	1
8	B	N	N	T	N	T	2	A	-10
9	B	T	N	T	N	T	3	B	1
10									

Fig. 1

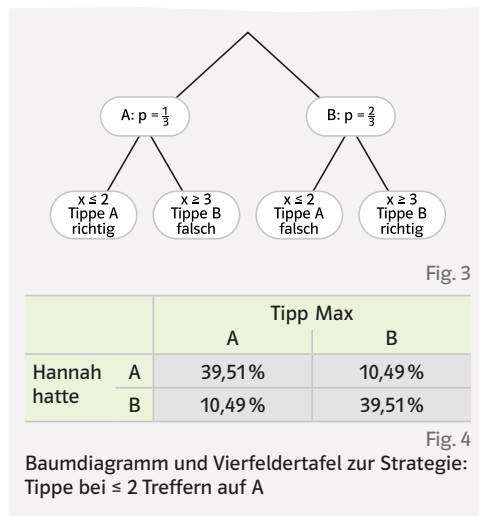
- Bestätige, dass die Einträge in den Spalten H und I stimmen und beantworte die Fragen zum Gewinnspiel in 2 auf der Grundlage einiger Simulationen. Summiere dazu die Punkte in Spalte I.
- Suche mithilfe der Simulation nach der besten (am wenigsten verlustreichen) Strategie für den Fall, dass die Gewinnregel 2 dadurch noch weiter verschärft wird, dass man bei jedem falschen Tipp auf A 20 Punkte verliert. Wähle dazu  $I1 = -20$  und variiere H1.

### 4 Theorie (Wahrscheinlichkeit)

- Fig. 2 zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Hannah bei ihrem fünfmaligen Ziehen aus den Beuteln A bzw. B 0, 1, ..., 5 Treffer erhält. Fasse die Aussagen von Fig. 2 in Worte und erläutere ohne Rechnung, warum die Angaben plausibel sind.
- Kontrolliere Fig. 2 mithilfe eines fünfstufigen Wahrscheinlichkeitsbaums mit 32 Ästen.
- Max tippt „bei  $\leq 2$  Treffern auf A. Vervollständige mit den Angaben aus Fig. 2 den Wahrscheinlichkeitsbaum aus Fig. 3 und bestätige, dass sich die Vierfeldertafel aus Fig. 4 ergibt.
- Begründe: Max
  - tippt zu ca. 79 % richtig,
  - rechnet bei Regel 1 durchschnittlich mit 0,580 Punkten Gewinn je Spiel,
  - rechnet bei Regel 2 mit seiner Strategie durchschnittlich mit 0,364 Punkten Verlust.

Treffer	0	1	2	3	4	5
A: $p = \frac{1}{3}$	13,17%	32,92%	32,92%	16,46%	4,12%	0,41%
B: $p = \frac{2}{3}$	0,41%	4,12%	16,46%	32,92%	32,92%	13,17%

Fig. 2



### 5 Optimieren der Strategie

- Bestimme mithilfe von Fig. 2 die Vierfeldertafel, die zur vorsichtigeren Strategie „Tippe bei  $\leq 1$  Treffern auf A“ passt. Zeige, dass bei der vorsichtigeren Strategie die Wahrscheinlichkeit für einen richtigen Tipp auf 70,78 % sinkt, dass man so aber auch bei Gewinnregel 2 langfristig noch Gewinn machen kann.
- Untersuche, wie sich die Situation ändert, wenn man bei Gewinnregel 2 statt 10 Punkte 20 Punkte verliert und gleichzeitig die Strategie ändert in „Tippe nur bei  $x = 0$  auf A“. Erläutere, inwiefern die Überschrift „Gewinn schlägt Wahrheit“ das Spiel beschreibt.
- Sucht nach alltagsnahen Entscheidungssituationen, in denen Wahrscheinlichkeiten und Kosten von Fehlentscheidungen eine Rolle spielen, und sucht nach Analogien zu obigem Entscheidungsspiel.