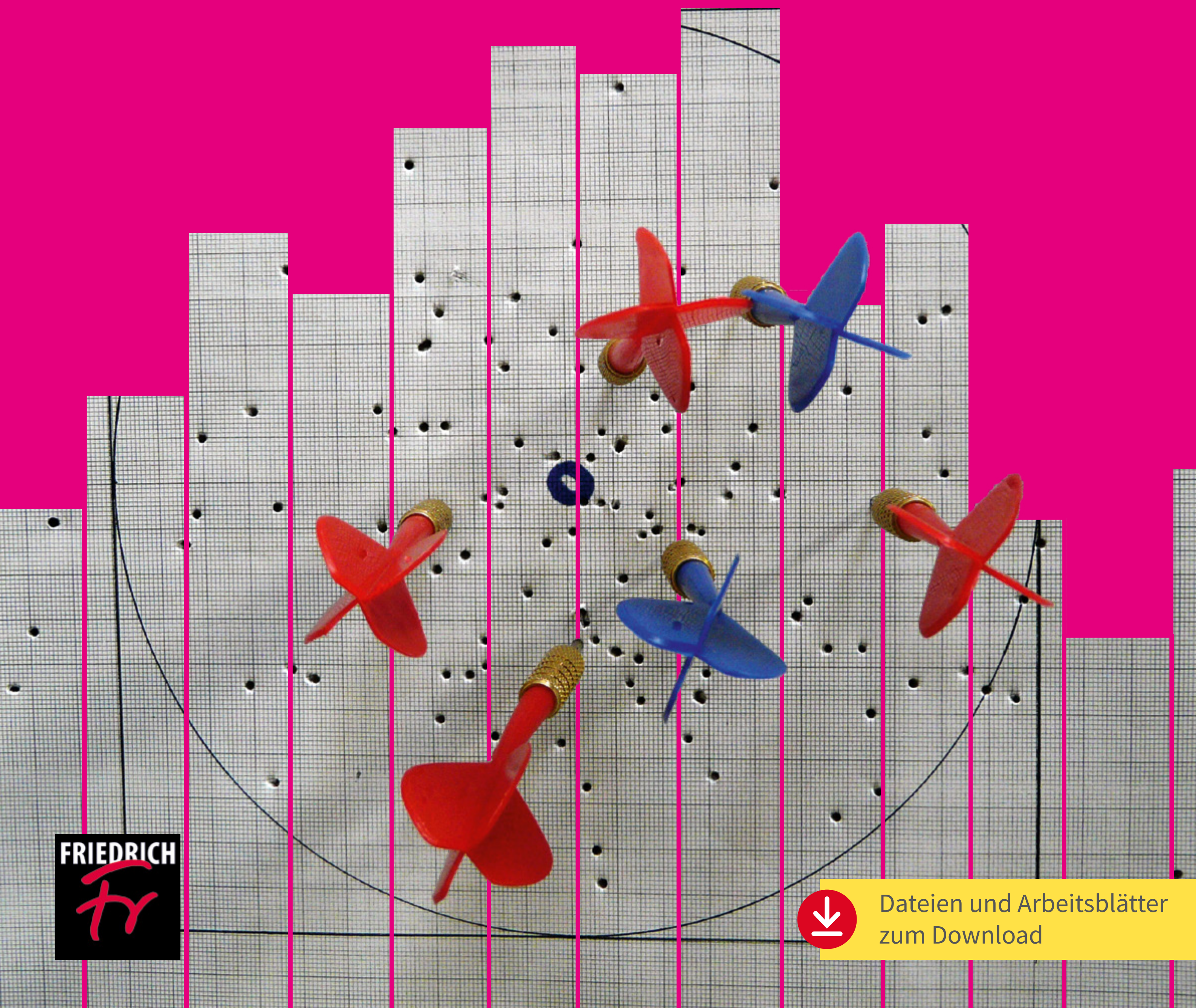
mathematiklehren

Stochastik erkunden

Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra

Wolfgang Riemer
Reimund Vehling



FRIEDRICH

Dateien und Arbeitsblätter zum Download

Ein traditioneller Algorithmus für weniger mündige Bürger. Und doch: Wer Münzen wirft, Würfel rollt … oder Blümchen zupft … der spielt mit wichtigen Modellen (nach Lothar Sachs).

Liebe Leserin, lieber Leser,

die Welt ist voller Daten, voller Interpretationen, voller Wahrscheinlichkeitsaussagen, voller Schlussfolgerungen, voller Entscheidungen unter Unsicherheit.

Aber wie kommt man zu den Schlussfolgerungen? Wie genau sind die Wahrscheinlichkeitsangaben? Was sind überhaupt Wahrscheinlichkeiten? Was unterscheidet Wahrscheinlichkeiten von relativen Häufigkeiten? Was unterscheidet „theoretische" von „empirischen" Wahrscheinlichkeiten? Gibt es überhaupt „empirische" Wahrscheinlichkeiten oder sind das relative Häufigkeiten? Und was bedeuten Wahrscheinlichkeiten bei nicht reproduzierbaren Situationen wie etwa dem Klimawandel?

Dies alles zu fragen ist einfach. Überzeugende Antworten zu geben erfordert deutlich mehr Wissen und Anstrengung. Und: Wir sind mit unseren Fragen noch nicht fertig. Es gibt noch mehr, über das sich ein Nachdenken – auch im Unterricht – lohnt:

- Was hat Lernen aus Erfahrung mit Wahrscheinlichkeit zu tun? In der Werbung werden fast ausschließlich attraktive Models abgelichtet – hat das nicht viel mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Lernen aus Erfahrung zu tun?
- Warum verschweigen „spitzfindige" Statistiker Stichprobenumfänge? Warum sind die Achsen statistischer Zeitungsgrafiken mitunter anders beschriftet als im Mathebuch? Aus Nachlässigkeit? Aus Hinterlist?

Wenn Ihre Schülerinnen und Schüler über solche Fragen nachgedacht haben, vielleicht sogar auf einige dieser Fragen überzeugende Antworten geben können, dann war Ihr Stochastikunterricht erfolgreich und allgemeinbildend, dann haben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern eine gute Portion Mündigkeit auf den Lebensweg mitgegeben.

Aber was ist zu tun, damit das gelingt? Für uns hat guter Mathematikunterricht viel Ähnlichkeit mit dem Forschen in einem Labor, in dem man großen Fragen im Kleinen, in einer „klinisch sauberen" Umgebung unter definierten und präzise festgelegten Rahmenbedingungen nachgeht. Dabei werden Grundlagen gelegt, zentrale Begriffe gefestigt, Zusammenhänge elementarisiert und „exemplarisch auf den Punkt" gebracht. Und zwar nicht (oder nicht nur) durch Erklären, Lesen und Diskutieren, sondern immer wieder auch durch selber Tun, durch Experimentieren mit Würfeln, Münzen usw., durch das Aufstellen und Erproben von Modellen, durch „was wäre wenn"-Analysen im Rahmen von händischen oder digitalen Simulationen.

Nur im Wechselspiel von Nachdenken und praktischem Handeln lassen sich altersgerecht adäquate und vor allem tragfähige Grundvorstellungen aufbauen, begriffliche Festlegungen verstehen und Grundkonzepte der Stochastik erarbeiten. Hierbei ist die für im schulischen Bereich kostenfreie und mehrfach ausgezeichnete Software GeoGebra ein mächtiges und hilfreiches Werkzeug.

Mit Rücksicht auf unterschiedliche Leserinteressen gliedert sich das vorliegende Heft in

- eine „Werkzeugkiste" zum Bearbeiten stochastischer Fragestellungen mit GeoGebra,
- fertige Dateien zur direkten Verwendung im Unterricht und
- konkrete Arbeitsblätter zu interessanten stochastischen Projekten.

Diese Bausteine stehen nicht unverbunden nebeneinander, sie werden verbunden durch einen roten Faden, durch unsere „Philosophie guten Stochastikunterrichts", die sich durch wenige Paradigmen charakterisieren lässt. Sie halten somit auch eine „Didaktik der Stochastik" in Händen. Diese ist in vielen Unterrichtsexperimenten im Rahmen intensiver „Handlungsforschung" gewachsen. Sie hat sich im Schulalltag bewährt und überwindet die seit 40 Jahren beklagte Trennung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Wir wünschen Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern viel Freude und spannende Entdeckungen beim „Erlebnis Stochastik" mit GeoGebra!

Wolfgang Riemer

Reimund Vehling

3

Kapitel 3: Projekte

Stochastik unterrichten – worauf kommt es an?

1 Wahrscheinlichkeit und Statistik: ein spannungsgeladenes Verhältnis

„Statistik ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ist blind, Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Statistik ist leer.“ So charakterisierte Hans Schupp (1982) als Vorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik das Verhältnis zwischen den beiden Säulen der Stochastik und brachte damit seine Unzufriedenheit mit dem damaligen Curriculum zum Ausdruck. Tatsächlich liest sich das Curriculum auch heute noch linear wie folgt:

- zuerst die beschreibende Statistik,
- dann die Wahrscheinlichkeitsrechnung und
- zum Abschluss die beurteilende Statistik.

Damit wird das Vorgehen der Hochschule, das von Anfang an nach formaler Exaktheit und Systematik strebt, kopiert. Im Zentrum schulischer Stochastik stehen aber neugierige Kinder und Jugendliche mit ihren Alltagsintuitionen und Interesse an spannenden Fragen. Diese gilt es hervorzuholen und zu beantworten: Im Unterricht stehen Systematik und formale Exaktheit am Ende, nachdem Begriffe über konkrete Inhalte als sinnstiftend erlebt und Zusammenhänge entdeckt wurden, nicht am Anfang. Stochastik „tickt“ in Schule anders als in Hochschule!

Das brachte in den 1970er-Jahren eine Klasse 7 dadurch zum Ausdruck, dass sie einen Papierflieger an der Tafel zerschellen ließ, als es in den ersten Stochastikstunden nicht um Wahrscheinlichkeit ging, sondern um Grundräume, um Ergebnisse, um Ereignisse, um Schnittmengen („Und-Ereignisse“) und Vereinigungsmengen („Oder-Ereignisse“). Die Parallelität zu einer universitären Veranstaltung mit dem Titel „Wahrscheinlichkeitstheorie“, bei der zunächst die Maßtheorie thematisiert wird, ist unverkennbar. Leider trug die in den 1970er-Jahren während der „strukturmathematischen Welle“ unter dem Stichwort „Mengenlehre“ kultivierte „Ereignisalgebra“ zur Förderung stochastischer Grundvorstellungen wenig bei. Sie hat den Namen Kolmogorow – der in keinem Lehrplan mehr auftaucht – in schulischen Gefilden völlig zu Unrecht diskreditiert.

Aber wie lassen sich Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik auf der Schule sinnvoll verzahnen und so die von Hans Schupp kritisierte „blinde Leere“ in „sehende Fülle“ verwandeln? Unsere Antwort ist so kurz und griffig, dass sie sich in wenige Paradigmen fassen lässt.

2 Paradigmen

- Verwende einen passenden Wahrscheinlichkeitsbegriff.
- Trenne Modell und Realität – messerscharf und konsequent.
- Untersuche Zufallsschwankungen, anstatt sie wegzuwünschen.
- Stelle nicht nur Aufgaben, sondern echte Fragen, die durch Experimente beantwortet werden.
- Nutze den „didaktischen Dreischritt“: Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren.
- Nutze Software nicht nur zur Individualisierung (die schnell in „Vereinzelung“ endet), sondern vor allem zur Verlangsamung, als Anlass zu sinnstiftendendem und begriffsbildendem Kommunizieren im Plenum. Nach dem Motto: „Einer klickt, alle denken – das ist besser als alle klicken, keiner denkt.“

In den folgenden Abschnitten werden diese Paradigmen am Beispiel zweier Schlüsselstunden erläutert.

3 Wahrscheinlichkeit (Schlüsselstunde Klasse 7)

3.1 Hypothetisch-prognostischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Es ist die erste Stunde zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (die Schülerinnen und Schüler sind mit dem Prozentbegriff vertraut): Jeder erhält einen Quader (**Abb. 1**), dessen Seiten so beschriftet sind, dass sich die Augenzahlen der Gegenseiten zu 7 addieren – wie bei einem Spielwürfel.

Schritt 1: Spekulieren

Der Einstiegsimpuls lautet:

Schaut euch die Quader genau an und schätzt die „Chancen“ der sechs Augenzahlen in Prozent …
Nicht würfeln, nur schätzen! Nach Gefühl.

Die Lernenden akzeptieren das Würfelverbot und nennen „Prozentzahlen“, von denen man einige festhält wie in **Abb. 1**. Dabei beachten sie intuitiv:

- Gegenseiten haben gleiche Chancen.
- Große Seiten haben große Chancen.
- Alle Chancen addieren sich zu 100 %.

Das Missachten eines der drei Punkte führt zu fruchtbaren Diskussionen: Johanna hatte erst die Chancen für 1 und 3 geschätzt und zu spät bemerkt, dass dann für 2 zu viel übrig bleibt; Alexandra dachte an einen realen Versuchsausgang, nicht an Chancen. Dabei wird der Unterschied zwischen Modellebene (Chance bzw. Wahrscheinlichkeit, vor dem Versuch, „gefühlt“) und Realitätsebene (Häufigkeit, nach einem Versuch „ausgezählt“) greifbar. Die geschätzten Wahrscheinlichkeiten in den Tabellenzeilen drücken Erwartungen aus. Wir nennen sie „hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilungen“. *Verteilungen* deshalb, weil sich die 100 % auf alle möglichen Seiten verteilen; *hypothetisch*, weil wir nicht sicher sind.

Schritt 2: Experimentieren

Nach dem Spekulieren wird das Experiment mit Spannung erwartet. Jeder würfelt 100-mal. Die Ergebnisse werden in 5er-Gruppen zusammengefasst, dann langsam zum

Würfeln des Quaders mit Würfelbechern – auf den Tisch gestülpt						
Schätzungen	1	2	3	4	5	6
René	10 %	4 %	35 %	35 %	5 %	10 %
Stefan	15 %	10 %	25 %	25 %	10 %	15 %
Alexa	10 %	12 %	35 %	20 %	15 %	8 %
Johanna	15 %	15 %	20 %	20 %	15 %	15 %
Jasmin	15 %	5 %	30 %	30 %	5 %	15 %
Fläche in cm^2	2,99	2,60	4,60	4,60	2,60	2,99
Fläche in %	14,7 %	12,8 %	22,6 %	22,6 %	12,8 %	14,7 %

Abb. 1: Der Quader $1{,}3 \times 2 \times 2{,}3\,cm^3$ ist wie ein Würfel beschriftet. Die Tabelle enthält die *geschätzten* Chancen (Hypothesen) für die unterschiedlichen Augenzahlen. Alexas Schätzung führt zu intensiver Diskussion. Der Unterschied zwischen unsymmetrischen Häufigkeitsverteilungen (Realitätsebene) und symmetrischen Wahrscheinlichkeiten (Modellebene) tritt prägnant hervor – deswegen sind teilsymmetrische Objekte ideal.

Mitschreiben ins Heft diktiert und simultan am Beamer kontrolliert. Durch die Verlangsamung beim Mitschreiben entsteht ein Gefühl für die Zufallsschwankungen, die dann ganz bewusst wahrgenommen werden (**Abb. 2**).

Schritt 3: Reflektieren

Durch Bilden von 5er-Gruppen verkleinern sich die Zufallsschwankungen, aber sie verschwinden nie ganz, auch nicht durch Zusammenfassen der 2700 Ergebnisse der ganzen Klasse. Abschließend einigen wir uns auf brauchbare symmetrische (!) Wahrscheinlichkeitsverteilungen. In die haben wir sehr viel mehr Vertrauen als in die zuvor „aus dem hohlen Bauch“ geschätzten.

Werden Schülerinnen und Schüler statt mit Quadern zum Beispiel mit dem Vierfach-Münzwurf konfrontiert, verläuft der Unterricht mit Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren völlig analog. (Der Vierfach-Münzwurf wird gern verpackt als „Lehrer Lämpels Notengebung“ (Herget 1997, S. 5): Für jede Arbeit wirft er vier (ideale) Münzen, zählt, wie oft „Wappen“ gefallen ist, addiert 1 und notiert dieses Ergebnis als Note). In beiden Fällen bietet es sich an, eine Theoriephase nachzuschieben:

- Beim Quader richten wir die Wahrscheinlichkeiten so ein, dass sie den Seitenflächen proportional werden – und erhalten ein schlechtes Modell.
- Beim Vierfach-Münzwurf unterlegen wir eine Laplace-Struktur mit 16 Ergebnissen – und erhalten ein gutes Modell.

Das Erlebte fassen wir wie folgt zusammen:

Wahrscheinlichkeiten sind **vom Menschen gesetzte Modelle** der Wirklichkeit, die Vorhersagen machen wollen und die man in Modellbildungskreisläufen nachjustiert und optimiert.
Wahrscheinlichkeiten leben auf der Modellebene („im Kopf“), sie schauen nach vorne.
Relative Häufigkeiten leben in der Realitätsebene („im Würfelbecher“), sie schauen zurück.

Mit dem „hypothetisch-prognostischen“ Wahrscheinlichkeitsbegriff und der Modellierungssicht auf Wahrscheinlichkeiten schlägt man mehrere Fliegen mit einer Klappe:

Patrick	10	6	28	41	4	11
Daniel	6	7	35	45	4	3
Binoy	7	4	37	34	1	17
Tobias	3	6	48	33	6	4
Michael	12	0	28	42	7	11
absolute H.	38	23	176	195	22	46
relative H.	7,6 %	4,6 %	35,2 %	39,0 %	4,4 %	9,2 %

Paula	11	6	34	32	7	10
Elaine	14	10	28	24	9	15
Marie	4	6	41	32	11	6
Marga	10	6	34	29	7	14
Sandra	7	4	30	37	4	18
absolute H.	46	32	167	154	38	63
relative H.	9,2 %	6,4 %	33,4 %	30,8 %	7,6 %	10,5 %

Summe (27 Kinder)	279	207	834	883	204	293
	10,3 %	7,7 %	30,9 %	32,7 %	7,6 %	10,9 %

verbesserte Schätzung						
Hypothese A	11,0 %	8,0 %	31,0 %	31,0 %	8,0 %	11,0 %
Hypothese B	10,5 %	8,0 %	31,5 %	31,5 %	8,0 %	10,5 %

Abb. 2: Häufigkeiten und zwei verbesserte Schätzungen (vgl. 2-02-quader-auswertungsvorlage.ggb

- Man knüpft an alltägliche subjektivistische Vorerfahrungen (an unser „Bauchgefühl“) an. Schülerinnen und Schüler erleben: Mathe hat mit mir zu tun.
- Der hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeitsbegriff enthält – wenn man vollständige Symmetrie unterstellt – den Laplaceschen als Spezialfall.
- Im Gegensatz zum frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff (nach Richard von Mises) braucht man keine unendlich langen Versuchsserien, die es nicht gibt. Es entfällt die für das Verständnis und die Entwicklung tragender Grundvorstellungen fatale Vermischung von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit, also die Vermischung von Wirklichkeit und Modell.

Damit wird die „Kopernikanische Wende der Stochastik“ von Richard von Mises’ Wahrscheinlichkeit als „Grenzwert relativer Häufigkeiten“ hin zur Axiomatik des Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (in der man Wahrscheinlichkeiten genau wie bei uns als gesetzte Modelle deuten und damit weiterarbeiten kann) didaktisch nachvollzogen. Hier kommen also (als fast schon dialektische Pointe) strukturmathematische und fachdidaktische Intentionen zusammen, wenn auch aus unterschiedlichen Beweggründen.

4 Zufallsschwankungen und das $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz (Schlüsselstunde, Klasse 8)

Schritt 1: Spekulieren

Der Einstiegsimpuls lautet:

Wirf eine faire Münze in Gedanken erst 25-mal, dann 100-mal und anschließend 400-mal. Notiere jeweils eine Häufigkeit für „Kopf“, von der du glaubst, dass sie realistisch auftreten könnte. Wiederhole das viermal.

Die Lernenden diktieren ihre Ergebnisse in ein gemeinsames Kalkulationsblatt, das die Schätzungen als Punktdiagramm visualisiert (**Abb. 3** und **Abb. 4**). Diskussionen im Plenum sind garantiert, und das Bedürfnis „nachzuschauen“, wie sich faire Münzen tatsächlich verhalten, ist virulent.

Schritt 2: Experimentieren

Wir empfehlen, Münzen zunächst 25-mal und dann weiter bis insgesamt 100-mal händisch zu werfen und in Kleingruppen erleben zu lassen, wie sich die Schwankungen der relativen Häufigkeiten von 25 auf 100 tatsächlich entwickeln, und dann das Erlebte durch Computersimulation abzusichern.

Schritt 3: Reflektieren

Wie ein Vergleich von **Abb. 4** und **Abb. 5** zeigt, zerbrechen die Primärintuitionen an der erlebten bzw. simulierten Realität: Eine Vervierfachung (!) des Versuchsumfangs halbiert die Größe der Zufallsschwankungen, die man zum Beispiel über die Längen der Boxen in Boxplots misst.

Ist in Klasse 9 die Wurzelfunktion bekannt, kann man hier das für die beurteilende Statistik fundamentale $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz entdecken. In der Sekundarstufe I hat dieses den Status eines Naturgesetzes. In der Sekundarstufe II schließt sich die Begründung über die Sigmaregel der Binomialverteilung an. In ihrer einfachsten, für die Sekundarstufe I tauglichen Form nutzt man diese Regel als Faustregel so:

> Bei gegebener Wahrscheinlichkeit p liegt die relative Häufigkeit h fast immer in dem Intervall $[p-\frac{1}{\sqrt{n}}; p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$.
> Wenn man bei einer Wahrscheinlichkeitsangabe unsicher ist und eine relative Häufigkeit h beobachtet hat, die außerhalb von $[p-\frac{1}{\sqrt{n}}; p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ liegt, hat man Grund zu bezweifeln, dass p ein gutes Modell ist.

	absolut			relativ		
	25	100	400	25	100	400
bernd 1	15	17	75	0,6	0,17	0,1875
bernd 2	13	31	200	0,52	0,31	0,5
bernd 3	19	68	150	0,76	0,68	0,375
bernd 4	9	48	260	0,36	0,48	0,65

Abb. 3: Von Bernd gefühlte Zufallsschwankungen (in den unterlegten Zellen liegen die relativen Häufigkeiten außerhalb des Wurzeltrichters)

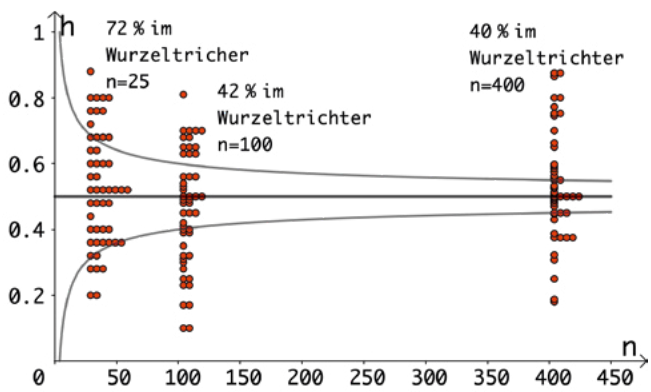


Abb. 4: Gefühlte Zufallsschwankungen der Klasse 8

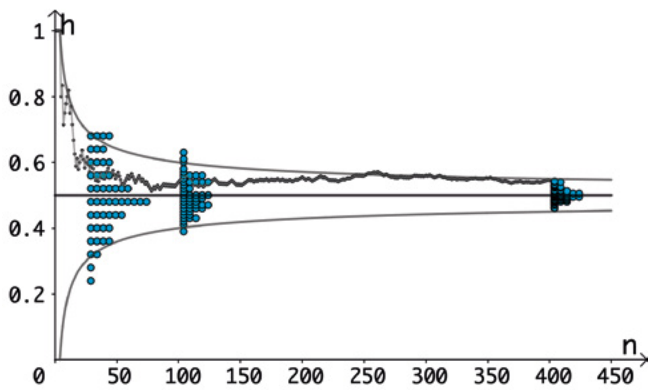


Abb. 5: Tatsächliche Zufallsschwankungen. An jeder festen Stelle n liegen ca. 95 % der relativen Häufigkeiten im Wurzeltrichter.

5 Beurteilende Statistik

Was bedeutet es inhaltlich, eine Hypothese H_0 mit 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit verworfen zu haben?
Diese Frage stellt sich in der Sekundarstufe II. Die Antwort darauf hängt vom Stichprobenumfang ab – und vom inhaltlichen Kontext. Sie lässt sich nicht in einem Merkkasten beantworten. Und die weit verbreitete Antwort *„Das bedeutet, H_1 gilt mit 95 %-iger Sicherheit“* ist Unsinn.
Deswegen unterschrieben im März 2018 binnen einer Woche 800 Berufsstatistiker einen Aufruf *„Schickt die Signifikanz in den Ruhestand“*. Sie verurteilen das mit Signifikanztests verbundene Schwarz-Weiß-Denken des Annehmens/Verwerfens von Hypothesen. Tatsächlich kann man jede Hypothese auf jedem Signifikanzniveau verwerfen, wenn man den Stichprobenumfang nur hinreichend vergrößert. Das liegt genau daran, dass Wahrscheinlichkeitsangaben nur Modelle sind, die die Wirklichkeit mehr oder weniger gut abbilden, nie ganz genau. Von daher tun wir gut daran, unsere Schülerinnen und Schüler mit dem hypothetisch-prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriff schon in Klasse 7 gegen „signifikanten Unfug“ zu impfen (vgl. Abschnitt 3). Und das scheint uns eine überzeugende Antwort auf Hans Schupps „blinde Leere“.
In der Sekundarstufe II helfen GeoGebra-Simulationen, diesen Zusammenhang zu vertiefen. Denn in der virtuellen Welt lassen sich Hypothesen in Zufallsgrößen verwandeln, und wir können erforschen, wie sich irrelevant kleine Unterschiede in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang als signifikant nachweisen lassen.

Konfidenzintervalle statt Signifikanztests

Als intuitiv naheliegende Alternative zu Signifikanztests empfehlen Valentin Amrhein, Sander Greenland und Blake McShane das Arbeiten mit *Konfidenzintervallen*, in denen man alle diejenigen Wahrscheinlichkeiten sammelt, die man nach einer Beobachtung nicht anzweifeln muss (Amrhein u. a. 2019). Damit werden Punktschätzungen von Wahrscheinlichkeiten durch Intervallschätzungen abgelöst. Und die Länge der Konfidenzintervalle überträgt die *fundamentale Idee der Messungenauigkeit* aus der Geometrie in die Stochastik.
Auch hier unterstützen Visualisierungen und Simulationen das Verstehen von Zusammenhängen.

6 Die Rolle von GeoGebra

Was den Softwareeinsatz betrifft, so hat GeoGebra für uns zunächst einmal eine dienende Funktion. Im Vordergrund stehen der Aufbau und die Förderung stochastischer Grundvorstellungen. Dabei sind Realexperimente unverzichtbar. Sie werden mithilfe von Software ausgewertet und gegebenenfalls durch „virtuelle“ Simulationen (mit dem Ziel einer vertiefenden Begriffsbildung) ergänzt, aber nicht ersetzt.
GeoGebra befreit von Rechnungen, die händisch durchgeführt von Wesentlichem ablenken. Wenn man „fertige“ Lösungen als BlackBox vorgibt und Lernenden Zeit schenkt, den Sinn dahinter zu erschließen, eröffnen sich neue problemlösende Zugänge und Möglichkeiten zu einer aktiven Konstruktion anspruchsvoller Begriffe. Das ist dann die höchste Stufe „Reconstruction“ bei der Arbeit mit neuen Technologien im Unterricht nach dem S.A.M.R.-Modell von Ruben R. Puentedura.
Nutzen Sie GeoGebra also nicht nur zum Rechnen, Auswerten, Visualisieren und Simulieren, sondern auch zum Konstruieren von Begriffen. Experimentieren Sie im Unterricht hin und wieder auch mit dem Blackbox-Whitebox-Prinzip, das der CAS-Didaktik entlehnt ist (vgl auch S. 34).
Es könnte sich lohnen!

3 Projekte

„Projekt? Nein Danke! Dafür habe ich keine Zeit!“ Könnte es sein, dass dieser Blick am Kern der Projektidee vorbeigeht? Die folgenden Seiten überwinden die Trennung zwischen „Pflicht“ und „Kür“.
Die vier hier ausgewählten Kontexte sind „multifunktional“ einsetzbar, aber allesamt an Experimente gekoppelt, die sich gut in den Alltagsunterricht integrieren lassen.
Und stets hilft GeoGebra, nicht nur bei Datenauswertungen, sondern auch beim Verstehen, Verknüpfen, Vertiefen und beim Begriffe bilden.

Das schiefe Glücksrad (ab Klasse 7)

Nehmen wir als Beispiel das Glücksrad, bei dem eine Haarklemme um einen Pin rotiert. Laplace’scher kann man als Glücksrad kaum sein.
Aber was passiert, wenn man das Glücksrad nun auf einer Seite anhebt? Gute Frage, auf die wir alle spontan meist hereinfallen. Schon in Klasse 5 im Rahmen beschreibender „Strichlisten-Statistik“ verblüfft dieses Experiment, weil Erwartung und Erfahrung mit jedem Schnipser weiter auseinanderdriften. Nach Einführung des Prozentbegriffs wird es zum Paradigma für den Unterschied zwischen Modell und Realität. An ihm kristallisiert sich der hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeitsbegriff heraus, ähnlich prägnant wie beim Würfeln mit Quadern.
In der beurteilenden Statistik wird „das schiefe Glücksrad“ zum „Abenteuerspielplatz“ für Hypothesentests und Konfidenzintervalle, auf dem sich, wenn man genauer hinschauen möchte, dann völlig überraschend auch stetig (sinusförmig) verteilte Zufallsgrößen tummeln. Und es gibt eine in sich geschlossene Theorie.
Somit kann dieses kleine Experiment zum vernetzenden „Roten Faden“ quer durch die ganze Schulstatistik werden.

Reaktionszeiten

Wer schnell viele authentische Daten sammeln möchte, der wird dieses Experiment lieben: Die Längen der Strecken, die ein Smiley zufallsgesteuert auf dem Bildschirm hüpft, werden in einer Kalkulationstabelle gespeichert – und dann die Zeit, die man braucht, um ihn auf der neuen Position anzuklicken.
Wie sieht die Verteilung der Reaktionszeit aus? Wie hängen Hüpfstrecke und Reaktionszeit zusammen? Ist man morgens schneller als mittags im „Suppenkoma“? Klicken Rechtshänder mit der rechten Hand schneller – und Linkshänder schneller mit links?
Man beantwortet schon in der Sekundarstufe I mit beschreibender Statistik spannende Fragen – und in der Sekundarstufe II spielt man auf der Klaviatur statistischer Testverfahren, vom einfachen Vorzeichentest bis hin zum anspruchsvollen t-Test.

Das Sprechen und die Statistik

Die Verteilung von Floskeln wie den „Ähs“, die wir beim Reden einstreuen, wenn wir nachdenken oder unsicher werden, bietet Datenmaterial für eine spannende (und durchaus heitere) Stunde zur beschreibenden Statistik in Klasse 6.
Die gleiche Datenerhebung ermöglicht in der Sekundarstufe II einen eleganten Kopfsprung aus der Analysis (Exponentialfunktion) in das Thema Wahrscheinlichkeitsdichten, einen Kopfsprung, der in jedem (!) Grundkurs gelingt und an den man sich auch lange nach dem Abitur mit Vergnügen erinnern wird.

Von der Handspanne zur Standardabweichung

Auch das Messen von Handspannen kann zu einem solchen vernetzenden Leitfaden durch die ganze Statistik werden (Vehling, 2019). Wir nutzen das Experiment und die Daten, um dem (in der Schule oft hinterfragten, aber selten aufgeklärten) Unterschied zwischen den beiden Standardabweichungen s_n und s_{n-1} auf die Schliche zu kommen und schlagen (auf sehr konkreter Grundlage) die Brücke zu erwartungstreuen Schätzern. Nichts hindert Sie daran, die Idee und die Handspanne-Daten „nur“ im Rahmen beschreibender Statistik schon in Klasse 6 zu nutzen.
Man braucht die Arbeitsblätter, die hier zu einem Leitthema angeboten werden, also nicht komplett einsetzen oder durcharbeiten zu lassen. Sie sind als Ideenkiste für eigne Vernetzungen im ganz normalen Unterricht gedacht – und darüber hinaus lassen sie jede Menge Raum für Forschungsvorhaben wissbegieriger Schülerinnen und Schüler. Greifen Sie zu und probieren Sie aus!

3.1 Das Glücksrad auf der schiefen Ebene

Darum geht es

- überraschende Wahrscheinlichkeiten
- Modellierungskreislauf: Hypothesen bezweifeln/revidieren
- stetige Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsdichte, beurteilende Statistik

Lernvoraussetzungen

Sekundarstufe I: Prozentbegriff
Sekundarstufe II: Signifikanztests, Konfidenzintervalle
ggf. physikalische Grundbegriffe

Idee (Sekundarstufe I und Sekundarstufe II)

Glücksräder dienen im Stochastikunterricht als Beispiele für Laplace-Experimente und geometrische Wahrscheinlichkeiten. Man experimentiert aber nicht mit ihnen, weil man wegen der Symmetrie weiß, was dabei herauskommen wird – und weil kommerzielle Räder lange rotieren.
Verwendet man eine einfache Haarklemme oder eine Büroklammer, die man um einen Pin rotieren lässt, braucht das Glücksraddrehen nicht länger als das Würfeln, weil die Klemme wegen der Reibung schnell stoppt. Stellt man die Unterlage (etwa den Buchdeckel) schief wie in Bild 1 auf S. 82, entsteht eines der spannendsten und überraschendsten Experimente, das der Stochastikunterricht zu bieten hat (vgl. Riemer 2017).

Ergebnis

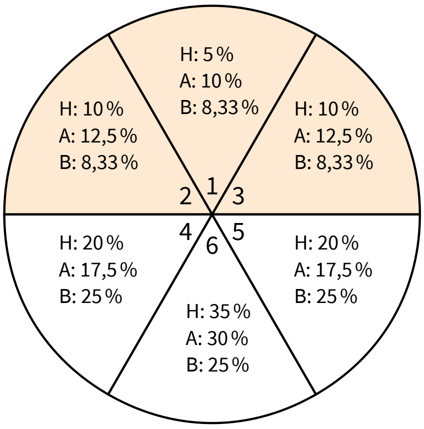


Abb. 1: Drei Jugendliche, Hannah (H), Alex (A) und Bülent (B), schätzen die Wahrscheinlichkeit für das Stehenbleiben der Haarklammer in dem angegebenen Sektor.

Beim **Spekulieren** werden in der Regel Wahrscheinlichkeiten wie in **Abb. 1** genannt: „Die Wahrscheinlichkeit rutscht nach unten – die Frage ist nur, wie stark. Rechts und links ist es gleich."

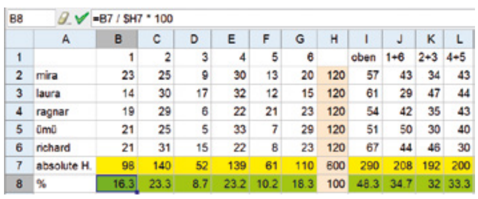
Beim **Experimentieren** vereinbart man den Start im unteren Feld 6 und eine feste Drehrichtung „im Uhrzeigersinn". Es muss so kräftig geschnippt werden, dass die Haarklemme vor dem Anhalten mindesten zwei volle Umdrehungen absolviert. Beim Zusammenfassen der Ergebnisse zeigt sich dann wider aller Erwartung:

- Die Neigung hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten der Felder 1 und 6.
- Die „bergauf"-Felder 2 und 4 sind gleich wahrscheinlich, ebenso die „bergab"-Felder 3 und 5.
- Die Wahrscheinlichkeit, die bergauf zu 1/6 dazukommt, fehlt bergab.

Im Nachhinein verstehen auch Schülerinnen und Schüler in Klasse 7 die Begründung. Nikita formuliert es so: „Da, wo es bergauf geht, bremst es und die Klemme bleibt eher stehen. Und weil es bei 2 und 4 gleich viel bergauf geht, sind die Wahrscheinlichkeiten dort gleich. Bergab ist es genauso, nur dass es da weniger bremst – und zwar genauso viel weniger wie bergauf mehr. Und bei 1 und 6 geht es nicht bergauf, deswegen ist es da 1/6, wie wenn das Brett gerade liegt."
Als überraschende Konsequenz ergibt sich: Bei zufälliger Wahl der Drehrichtung hat die Neigung keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten. Es bleibt bei einem Laplace-Glücksrad.
Die experimentellen Ergebnisse passen für nicht zu große Steigung ausgezeichnet zur Theorie. Die Haarklemme muss nur bergab überall sicher anhalten können. Sie darf also nicht von selber ins Rutschen geraten. Das ist auf üblichem Papier bis zu einer Steigung von ca. 30 % gegeben, bei glatter Laminierung bis ca. 20 %.

Zu den Arbeitsblättern

Arbeitsblatt 1 eignet sich für alle Jahrgangsstufen. Hier wird spekuliert und experimentiert. Wer ohne Theoriebildung gleich zum Hypothesentesten übergehen mag, springt zu **Arbeitsblatt 3**. Beim Sammeln der Ergebnisse empfiehlt sich das Diktieren der Häufigkeiten in die gemeinsame Vorlage **3-01-schnipsen.ggb**, die die Ergebnisse zusammenfasst und visualisiert (vgl. **Abb. 2**). Ein nach 11 200 Versuchen entwickeltes Wahrscheinlichkeitsmodell zeigt **Abb. 3**.



B8 =B7 / $H7 * 100

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		1	2	3	4	5	6		oben	1+6	2+3	4+5
2	mira	23	25	9	30	13	20	120	57	43	34	43
3	laura	14	30	17	32	12	15	120	61	29	47	44
4	ragnar	19	29	6	22	21	23	120	54	42	35	43
5	ümü	21	25	5	33	7	29	120	51	50	30	40
6	richard	21	31	15	22	8	23	120	67	44	46	30
7	absolute H.	98	140	52	139	61	110	600	290	208	192	200
8	%	16.3	23.3	8.7	23.2	10.2	18.3	100	48.3	34.7	32	33.3

Abb. 2: Ausgefüllte Auswertungsvorlage 3-01-schnipsen.ggb

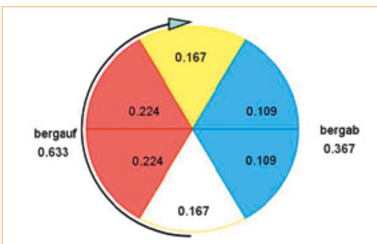


Abb. 3: Gutes Wahrscheinlichkeitsmodell nach 11 200 Versuchen

Arbeitsblatt 2
Wenn es in der Sekundarstufe II um stetige Zufallsgrößen geht, lässt sich die Endposition $0 < x \leq 2\pi$ des Zeigers ausgezeichnet beschreiben durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + k \cdot \sin(x))$$

mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}(x - k \cdot \cos(x) + k).$$

Dabei liegt $x = 0$ wieder unten und der Zeiger rotiert im Uhrzeigersinn. Der Parameter k ist proportional zur Steigung $\tan(\alpha)$ der schiefen Ebene. Man kann ihn durch Abgleich mit den experimentellen Ergebnissen bestimmen.
$k \approx 0{,}4$ ist bei 10 % Steigung eine gute Wahl.
In **Arbeitsblatt 2** werden die Funktionsterme vorgegeben und in den Aufgaben in Abhängigkeit vom Parameter k inhaltlich interpretiert. Die Datei **3-01-sinusdichte.ggb** zeichnet die Dichtefunktion (**Abb. 4**) und die sich daraus ergebenden Wahrscheinlichkeiten der sechs Felder des Glücksrades in Abhängigkeit vom Parameter k. Durch Variieren von k minimiert man die Abweichungen zwischen dem Modell und den beobachteten Häufigkeiten.
Vertiefung: Man kann mithilfe der Dichte die Grenzen der sechs Felder so verschieben, dass sie gleich wahrscheinlich werden und man trotz Neigung ein Laplace-Glücksrad erhält (**Abb. 5**).

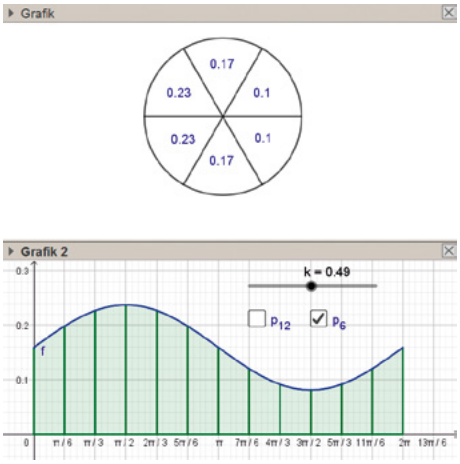


Abb. 4: Dichtefunktion

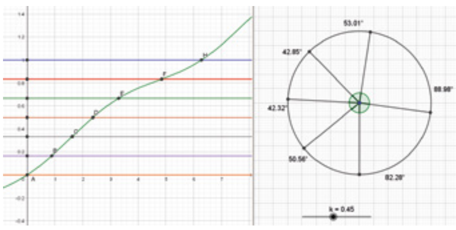


Abb. 5: Experimentieren mit 3-01-schiefes-laplaceglueckstrad.ggb

Zu Arbeitsblatt 3
Die beim anfänglichen Spekulieren aufgestellten Vermutungen bieten Material für plausible Hypothesen, die mit den gängigen (abiturrelevanten) Signifikanztests oder auch mithilfe von Konfidenzintervallen geprüft werden können. In Arbeitsblatt 3 werden diese Verfahren an einem vorgegebenen Datensatz gefestigt und eingeübt. Es zeigt sich:
Die Hypothese einer „rechts-links"-Symmetrie kann man beim Schnippen im Uhrzeigersinn mitunter schon nach 120 Versuchen bezweifeln, die Hypothese einer „oben-unten"-Symmetrie hält dagegen allen Tests stand.
Das gilt auch für den Chi-Quadrat-Test auf Gleichverteilung, wenn man die Ergebnisse (1 und 6), (2 und 3) und (4 und 5) zu drei Ereignissen zusammenfasst (zwei Freiheitsgrade, kritische 95 %-Grenze ≈ 6).
Alternativ kann man gleich oft im und gegen den Urzeigersinn schnippen und dann auf Gleichverteilung aller Felder 1 bis 6 prüfen (fünf Freiheitsgrade, kritische 95 %-Grenze ≈ 11).

Lösung zu Aufgabe 1 (Signifikanztests):
Nora möchte nachweisen: p(unten) > 0,5. Sie muss versuchen, H_0: p(unten) ≤ 0,5 gegen H_1: p(unten) > 0,5 zu verwerfen. Ablehnungsbereich von H_0: [895; 1720].
378 + 209 + 290 = 877 liegt nicht im Ablehnungsbereich. Nora kann H_0 nicht verwerfen und damit gelingt ihr der gewünschte „Nachweis" von p(unten) > 0,5 nicht.
Simon: bergauf: 332 + 378 = 710, bergab: 231 + 209 = 440, n = 710 + 440 = 1150 relevante Ergebnisse.
Simon möchte nachweisen: p(bergauf) > 0,5. Er versucht, H_0: p(bergauf) ≤ 0,5 gegen H_1: p(bergauf) > 0,5 zu verwerfen. Ablehnungsbereich von H_0: [604; 1150]. 710 liegt im Ablehnungsbereich. Der Nachweis gelingt.
Klara testet H_0: p(1) = 1/6 zweiseitig.
95 %-Prognoseintervall: [267; 318]. 280 liegt im Prognoseintervall.
Micha testet H_0: p(2;3) = 1/3 zweiseitig.
95 %-Prognoseintervall: [535; 611].
332 + 231 = 563 liegt im Prognoseintervall. Micha kann somit p(2;3) = 1/3 nicht anzweifeln.

Lösung zu Aufgabe 2
Das Chi-Quadrat-Testergebnis auf Gleichverteilung aller sechs Felder liegt mit $t \approx 68{,}31$ weit oberhalb der kritischen Grenze 11. Fasst man dagegen (1 und 6), (2 und 3) und (4 und 5) zusammen, ergibt sich 0,53 unterhalb der kritischen Grenze 6.

Lösung zu Aufgabe 3
Bei h = 843/1720 = 0,49 ergibt sich für oben [0,431; 0,549].
Bei h = 710/1720 = 0,41 ergibt sich für links [0,355; 0,472].
Bei h = 570/1720 = 0,33 ergibt sich für 1 bis 6 [0,278; 0,389].

Vertiefung: Physikalischer Hintergrund
Mit dem Online-Arbeitsblatt (https://fr-vlg.de/1840008a4) begründen interessierte Schülerinnen und Schüler den Term der Wahrscheinlichkeitsdichte über Energiebetrachtungen mithilfe der Physik der schiefen Ebene. Es eignet sich auch für ein Referat oder als Einstieg in eine Facharbeit, in der man untersuchen kann, wie sich die Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn man die Steigung so erhöht, dass der Zeiger bergab nicht mehr überall sicher anhält.

Glück auf der schiefen Ebene

Darum geht es

Ein Laplace-Experiment verändern und neue Wahrscheinlichkeiten untersuchen.

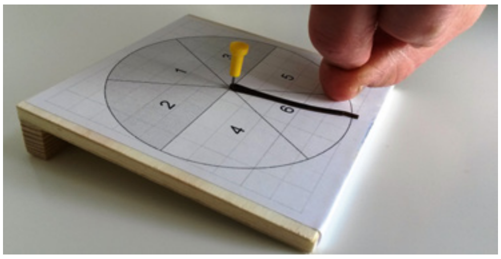


Bild 1: Gegenüberliegende Felder haben die Summe 7

Das ist zu tun

1. Spekulieren

Wenn man durch kräftiges Schnipsen eine Haarklemme vom Startfeld 6 aus im Uhrzeigersinn rotieren lässt, erhält man in der Ebene ein Laplace-Glücksrad, das auf allen Feldern mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 1/6 (also ~ 17 %) stehen bleibt. Jetzt wird solches Glücksrad durch Anheben um 10 % geneigt wie in Bild 1, das Feld 1 ist oben. Schätze: Wie verändern sich die Wahrscheinlichkeiten durch das Schiefstellen?

	1	2	3	4	5	6
%						

2. Argumentieren

Diskutiert über die folgenden Hypothesen, fügt eigene hinzu und stimmt dann in der Klasse ab.

Nora: Die untere Hälfte mit den Feldern 4, 5 und 6 wird wahrscheinlicher, weil die Wahrscheinlichkeit nach unten rutscht. Das ist wie bei einem schief liegenden Fahrrad mit dem Ventil. Am wahrscheinlichsten liegt das Ventil unten, am wahrscheinlichsten ist die 6.	**Simon:** Die Klemme hält am wahrscheinlichsten, wo sie am meisten gebremst wird, also bergauf bei 2 und 4. Die Bremswirkung der Felder 1 und 6 ändert sich durch das Schiefstellen nicht. Es bleibt dort bei der Wahrscheinlichkeit 1/6.
Niko: Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich bei einer Neigung von 10 % nicht, weil die Haarklemme nirgendwo ins Rutschen kommt. Es bleibt bei 1/6 für jedes der sechs Felder.	**Balthasar:** Die 5 wird am wahrscheinlichsten, weil da der Zeiger vom Startfeld 6 aus am längsten unterwegs war. Die Wahrscheinlichkeiten nehmen in der Reihenfolge 6-4-2-1-3-5 zu.
Ina: Bergauf (bei 2 und 4) nimmt die Wahrscheinlichkeit um genauso viel zu, wie sie bergab (bei 3 und 5) abnimmt.	**Micha:** Die oberen Felder 1 und 2 sind am wahrscheinlichsten, weil Uhren bei leerer Batterie mit dem Minutenzeiger auch immer oben kurz vor 12 Uhr stehen bleiben.

3. Experimentieren

a) Bildet Fünfergruppen. Jeder schnipst sein Glücksrad 120-mal von unten im Uhrzeigersinn. Zählt die Ergebnisse mit Strichlisten aus und fasst sie in eurer Gruppe zusammen mithilfe der Datei **3-01-schnipsen.ggb**.

b) Vergleicht eure Gruppenergebnisse mit den sechs Hypothesen aus Aufgabe 2 und entscheidet, welche brauchbar sein könnten, welche nicht, und stellt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf, auf die ihr euch verständigen könnt. Vergleicht mit anderen Gruppen.

c) Fasst die Ergebnisse der ganzen Klasse zusammen und bearbeitet Aufgabenteil b) erneut.

Name	1	2	3	4	5	6
absolute H						
%						

Bild 2: Auswertungsvorlage in der Datei 3-01-schnipsen.ggb

d) Stellt eine Hypothese darüber auf, wie sich die Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn man die Steigung auf 20 % verdoppelt, und überprüft diese Hypothese durch ein weiteres Experiment. Natürlich ist es auch möglich, die Arbeit zu teilen, sodass einige Fünfergruppen mit der Steigung 10 %, andere von Anfang an mit der Steigung 20 % experimentieren.

Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion

Darum geht es

Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion des schiefen Glücksrades kennenlernen und nutzen

Der Zeiger des Glücksrades lässt sich durch einen Punkt beschreiben, der im Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis rotiert. Die Position φ, auf der er stehen bleibt, ist dann eine stetige Zufallsgröße, deren Werte im Intervall (0;2π] liegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt „vor der Stelle x“ stehen bleibt, wird beschrieben durch die Verteilungsfunktion $P(\varphi \le x) = F(x) = \frac{1}{2\pi}(x - k \cdot \cos(x) + k)$.
Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist $f(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + k \cdot \sin(x))$ und die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad im Intervall [a; b] hält, ist dann $P(a \le \varphi \le b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2\pi}[x - k \cdot \cos(x)]_a^b$ mit $k \in [0; 1]$.

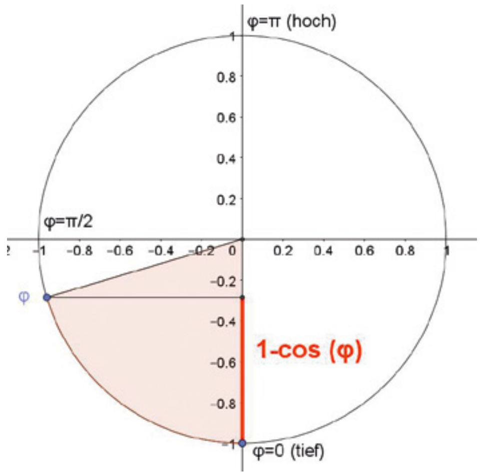


Bild 1: Schiefes Glücksrad von oben gesehen

Dabei ist $k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$ $(0 \le k \le 1)$ eine Materialkonstante: tan(α) ist die Steigung des Glücksrades und ρ gibt an, wie viel Prozent des Zeigergewichts den Zeiger durch Reibung bremsen.

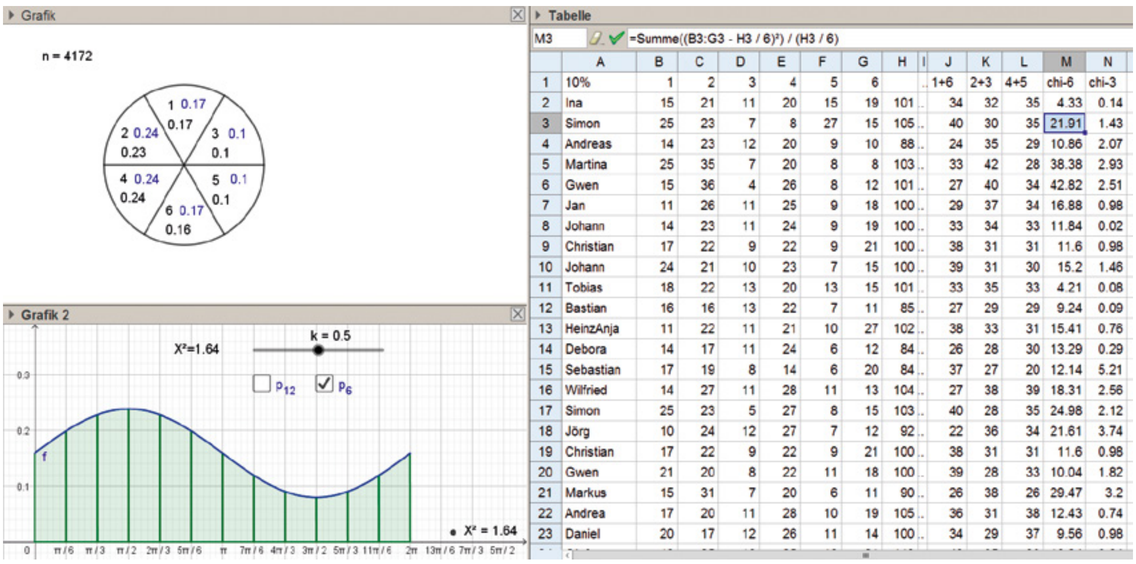
Das ist zu tun

a) Prüfen Sie: f hat tatsächlich alle Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte.

b) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f und die Verteilungsfunktion F in Abhängigkeit von der Materialkonstanten k (Schieberegler). Erläutern Sie die Bedeutung der Extremstellen und was es bedeutet, wenn f bei k = 1 eine Nullstelle besitzt. Erstellen Sie dazu eine eigene Datei.

c) Ergänzen Sie Ihre Datei so, dass die Wahrscheinlichkeiten der sechs Glücksradfelder in Abhängigkeit von k berechnet werden, ebenso die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Zeiger links bzw. rechts stehen bleibt. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit **Bild 2** für k = 0,5.

d) Variieren Sie k so, dass die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten zu den beobachteten relativen Häufigkeiten passen. Sie können nach Augenmaß arbeiten oder z. B. die Summe $\sum_{i=1}^{6}(p_k(i) - h(i))^2$ minimieren.
Alternative: Nutzen Sie **3-01-sinusdichte-modellanpassung.ggb**, die Sie mit Ihren eigenen Daten überschreiben können. Hier geht's zur Datei: https://fr-vlg.de/1840008a35



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	10%	1	2	3	4	5	6		..	1+6	2+3	4+5	chi-6	chi-3
2	Ina	15	21	11	20	15	19	101	..	34	32	35	4.33	0.14
3	Simon	25	23	7	8	27	15	105	..	40	30	35	21.91	1.43
4	Andreas	14	23	12	20	9	10	88	..	24	35	29	10.86	2.07
5	Martina	25	35	7	20	8	8	103	..	33	42	28	38.38	2.93
6	Gwen	15	36	4	26	8	12	101	..	27	40	34	42.82	2.51
7	Jan	11	26	11	25	9	18	100	..	29	37	34	16.88	0.98
8	Johann	14	23	11	24	9	19	100	..	33	34	33	11.84	0.02
9	Christian	17	22	9	22	9	21	100	..	38	31	31	11.6	0.98
10	Johann	24	21	10	23	7	15	100	..	39	31	30	15.2	1.46
11	Tobias	18	22	13	20	13	15	101	..	33	35	33	4.21	0.08
12	Bastian	16	16	13	22	7	11	85	..	27	29	29	9.24	0.09
13	HeinzAnja	11	22	11	21	10	27	102	..	38	33	31	15.41	0.76
14	Debora	14	17	11	24	6	12	84	..	26	28	30	13.29	0.29
15	Sebastian	17	19	8	14	6	20	84	..	37	27	20	12.14	5.21
16	Wilfried	14	27	11	28	11	13	104	..	27	38	39	18.31	2.56
17	Simon	25	23	5	27	8	15	103	..	40	28	35	24.98	2.12
18	Jörg	10	24	12	27	7	12	92	..	22	36	34	21.61	3.74
19	Christian	17	22	9	22	9	21	100	..	38	31	31	11.6	0.98
20	Gwen	21	20	8	22	11	18	100	..	39	28	33	10.04	1.82
21	Markus	15	31	7	20	6	11	90	..	26	38	26	29.47	3.2
22	Andrea	17	20	11	28	10	19	105	..	36	31	38	12.43	0.74
23	Daniel	20	17	12	26	11	14	100	..	34	29	37	9.56	0.98

Bild 2: Wahrscheinlichkeiten für k = 0,5 im Vergleich mit den Häufigkeiten

Das schiefe Glücksrad und beurteilende Statistik

Darum geht es

Signifikanztests, Konfidenzintervalle, ggf. Chi-Quadrat-Test

Was ist H_0?

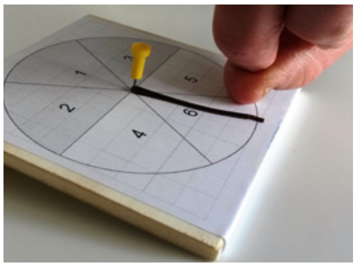
- Bei einseitigen Signifikanztests testet man entweder linksseitig H_0: $p \geq p_0$ gegen H_1: $p < p_0$ oder rechtsseitig H_0: $p \leq p_0$ gegen H_1: $p > p_0$.
- Bei zweiseitigen Signifikanztests testet man H_0: $p = p_0$ gegen H_1: $p \neq p_0$.

Aus der Werkzeugkiste

- Wenn mit Fehlentscheidungen Kosten verbunden sind, ist H_0 die Hypothese, deren fälschliches Verwerfen die schlimmeren Folgen hat.
- Wenn mit einer Fehlentscheidung keine Kosten verbunden sind und man nur eine Vermutung absichern möchte, ist H_0 das Gegenteil von dem, was man vermutet. Wenn man H_0 dann verwerfen kann, sichert das die Vermutung ab.

Vermutungen

- Nora: Die untere Hälfte mit den Feldern 4, 5 und 6 wird durch das Schiefstellen wahrscheinlicher als die obere Hälfte, weil die Wahrscheinlichkeit durch das Schiefstellen „nach unten rutscht".
- Simon: Die Klemme hält bergauf (bei 2 und 4) wahrscheinlicher als bergab (bei 3 und 5), „weil bergauf bremst".
- Klara: Die Wahrscheinlichkeiten des Feldes 1 ändert sich durch das Schiefstellen nicht. Es bleibt bei der Wahrscheinlichkeit 1/6.
- Micha: Die Felder 2 und 3 haben zusammen die Wahrscheinlichkeit 1/3.



1	2	3	4	5	6
280	332	231	378	209	290
16,3%	19,3%	13,4%	22,0%	12,2%	16,9%

Bild 1: Ergebnis aus 1720 Versuchen

Das ist zu tun

1. Signifikanztest

a) Nora, Simon, Micha und Klara möchten ihre Vermutungen durch je einen Signifikanztest auf dem 5 %-Signifikanzniveau überprüfen. Sollten Sie einseitig oder zweiseitig testen? Formulieren Sie jeweils eine passende Nullhypothese und bestimmen Sie den zugehörigen Ablehnungsbereich.

b) Geben Sie an, zu welchem Ergebnis der Test führt. Nutzen Sie die Daten aus Bild 1 und auch Ihre eigenen Daten.

2. Chi-Quadrat-Test (mit 5 bzw. 2 Freiheitsgraden)

Prüfen Sie mit dem Chi-Quadrat- Test, ob man folgende Hypothesen auf dem 5 %-Signifikanzniveau bezweifeln darf.

a) Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich bei einer Neigung von 10 % nicht, weil die Haarklemme nirgendwo ins Rutschen kommt. Es bleibt bei 1/6 für jedes der sechs Felder.

b) Bergauf und bergab gleichen sich aus, deswegen kommen die Felderpaare (1 und 6), (2 und 3) sowie (4 und 5) gleich wahrscheinlich, also je mit Wahrscheinlichkeit 1/3, vor.

3. Konfidenzintervalle

Bestimmen Sie das 95 %-Konfidenzintervall der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Glücksrad

a) oben (auf 1, 2 oder 3) anhält,

b) links (auf 2 oder 4),

c) auf einem der folgenden Felderpaare anhält:

i) Feld 1 und 2

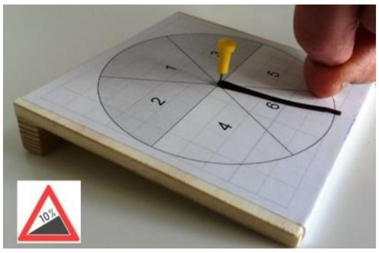
ii) Feld 3 und 4

iii) Feld 1 und 6.

Hinweis:

Für die Rechnungen in Aufgabe 1 können Sie **2-10-signifikanztest-tool.ggb** nutzen, für Aufgabe 3 die Datei **2-08-prognose-konfidenzintervall-tool.ggb**.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte beim schiefen Glücksrad physikalisch begründen



Reibungsenergie geht verloren

Wenn ein Massenpunkt (hier der Schwerpunkt des Zeigers), auf einer *horizontalen* Fläche rutscht, ist die Reibung proportional zum Gewicht G. Die Proportionalitätskonstante ρ gibt an, wieviel % des Gewichts als Bremskraft wirken.
Beim Rutschen auf einer *schiefen* Ebene zählt aber nicht das ganze Gewicht G, sondern nur die Komponente $G_{\perp} = G \cdot \cos(\alpha)$, die senkrecht auf die Ebene drückt (Bild 1). Die Reibung, die den Zeiger, bremst ist damit $\rho \cdot G \cdot \cos(\alpha)$.
Physiker berechnen die durch Reibung verlorene Bewegungsenergie als Produkt Bremskraft · Weg.
Der Zeiger verliert damit bei jeder Halbumdrehung bergauf und bergab durch Reibung gleichviel Energie $E_{\uparrow} = E_{\downarrow} = G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi$ und beim Überstreichen aller Felder während jeder Vollumdrehung: $E_o = G \cdot \cos(\alpha) \cdot 2\pi$.

In der *letzten* - entscheidenden - Runde hat der Zeiger daher im Start (φ = 0) eine Bewegungsenergie E_{kin} mit $0 < E_{kin} \leq E_o$. Hätte er mehr Energie, würde sie ja eine weitere Runde beginnen.

Wir nehmen nun an, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der der Zeiger in einem Feld stehen bleibt, proportional ist zu dem Anteil (an E_o) der Bewegungsenergie, die in diesem Feld abhandenkommt.

Lageenergie kommt zurück

Im der bergauf-Hälfte kommt aber durch das Ansteigen und die damit einhergehende Umwandlung in Lageenergie noch mehr Bewegungsenergie abhanden als nur durch die Reibung.
Der Zeiger hat oben bei $\varphi = \pi$ die Höhe $h = 2 \cdot \sin(\alpha)$, also die Lageenergie $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot G$.
(auch hier berechnet sich die Energie als Produkt aus Gewichtskraft und zurückgelegtem Weg (=Höhe)
Deswegen verringert sich die Bewegungsenergie
- bergauf um $G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi + 2G \cdot sin(\alpha)$ und
- bergab um $G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi - 2G \cdot sin(\alpha)$.

In der bergab-Hälfte kommt die gespeicherte Lageenergie nämlich zurück, da sie nach dem Energieerhaltungssatz im Gegensatz zu Reibungsenergie nicht verloren geht

Aufgaben

a) Begründen Sie hiermit durch eine Termumformung: Die Anteile an E_o sind bergauf $\frac{1}{2} + \frac{k}{\pi}$ bergab $\frac{1}{2} - \frac{k}{\pi}$ mit $k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$.

b) Begründen Sie mithilfe von Bild 2 für ein beliebiges Intervall $0 < \varphi \leq x$:
Wenn der Massenpunkt den Bogen $0 < \varphi \leq x$ überstreicht, dann verringert sich seine Bewegungsenergie um $\rho \cdot G \cdot \cos(\alpha) \cdot x + G \cdot (1 - \cos(x)) \cdot sin(\alpha)$. Kontrollieren Sie für $x = \pi$ und $x = 2\pi$.

c) Begründen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger im Bogen $0 < \varphi \leq x$ stehen bleibt, ist $F(x) = P(\varphi \leq x) = \frac{1}{2\pi}(x + k(1 - \cos(x)))$. Kontrollieren Sie: für $x = \pi$ ergibt sich der Wert aus a).

d) Begründen Sie mit c) den Term der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + k\sin(x))$ mit $k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$.

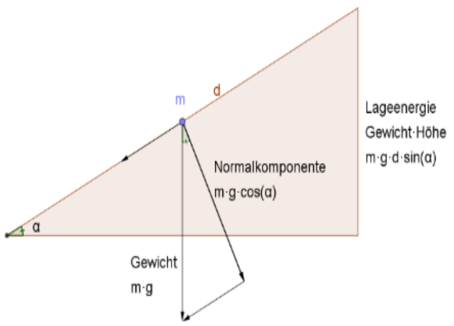


Bild 1: schiefes Glücksrad von der Seite.

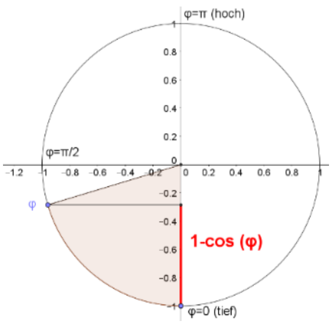


Bild 2: schiefes Glücksrad von oben gesehen

3.3 Warten auf „Äh“: Die Exponentialfunktion besucht die Stochastik

Darum geht es

- Verteilung von Wartezeiten (von Klasse 7 im Experiment bis zur Theorie in der Sekundarstufe II)
- die Exponentialfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte

Lernvoraussetzungen

Sekundarstufe I: Tabellenkalkulation, evtl. Simulationen
Sekundarstufe II: Exponentialfunktion, $(1 + \frac{x}{n})^n \approx e^x$ für großes n

Idee

Seit Tagen oder gar Wochen wartet man auf Anrufe oder Nachrichten – und dann kommen „alle auf einmal“. Das Gleiche bei den Geburtstagen: Das Jahr hat 365 Tage, aber die Geburtstage häufen sich mitunter so, dass man gar nicht alle feiern kann. Das Häufen von Ereignissen ist kein Zufall, dahinter steckt System: Wenn nämlich Ereignisse (zeitlich oder räumlich) „zufällig und gleichmäßig“ verteilt sind, dann sind die Abstände zwischen ihnen exponentialverteilt. Und das bedeutet: Kurze Abstände sind viel wahrscheinlicher als lange: Die Ereignisse häufen sich (vgl. auch Riemer, 2009). Diesem Phänomen kommt man in der Sekundarstufe I über Datenerhebungen und Simulationen auf die Schliche, in der Sekundarstufe II auch analytisch.

Vorgehen – methodische Hinweise

Den experimentellen Kern dieses Projekts bildet ein faszinierendes Experiment: Das Stoppen der Zeitspannen zwischen Füllwörtern „Äh“ in Erklärvideos oder Podcasts. Die Datei **3-03-stopp.ggb** misst Wartezeiten und speichert sie zur weiteren Auswertung direkt in einer Tabellenkalkulation, wie in Spalte A von **Abb. 1**.

In der Sekundarstufe I werden – nach einer vorgeschalteten Phase des Spekulierens – die gemessenen Wartezeiten klassiert und grafisch dargestellt (Arbeitsblatt 1). Wegen der Schiefe der Wartezeitenverteilungen treten die Unterschiede zwischen den Kennwerten Median und arithmetisches Mittel deutlich hervor. Prinzipiell reicht das für beschreibende Statistik ab Klasse 6. Die Zusammenhänge lassen sich aber auch durch sehr einfache Simulationen (Arbeitsblatt 3, Aufgabe 1) absichern.
In der Sekundarstufe II lässt sich das Auftreten der Exponentialfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte mithilfe der Pfadregel über die Simulation hinaus analytisch begründen (Arbeitsblatt 3, Aufgabe 2).

Hinweis zur Didaktik stetiger Zufallsgrößen

Dass Integrale den Bildungsstandards entsprechend nicht nur Flächen und Bestände beschreiben, sondern auch Wahrscheinlichkeiten, wird derzeit in der Analysis konsequent verschwiegen. Damit wird Schülerinnen und Schülern „die dritte Dimension“ der Integralrechnung vorenthalten. Das liegt daran, dass man sich üblicherweise erst nach der Binomialverteilung über das „Verschieben, Stauchen, Strecken“ von Säulendiagrammen optisch an die Gauß’sche Glocke „heranrobbt“ (Satz von De Moivre-Laplace, Sigmaregeln). Nur in Leistungskursen werden die hinter den diskreten Konturen steckenden Funktionen mitunter zu Wahrscheinlichkeitsdichten stetiger Zufallsgrößen umgedeutet. Vor diesem Hintergrund ist überraschend, dass es mithilfe von **Arbeitsblatt 2** in einer einzigen Analysis-Doppelstunde ohne weitere Vorbereitungen gelingt, die Bedeutung der Integralrechnung um die Dimension Wahrscheinlichkeit zu erweitern – und das in jedem Grundkurs.

Auswertung

Einen Eindruck von der Qualität der Ergebnisse, die man „beim Warten auf das nächste Äh“ erhalten kann, vermittelt **Abb. 1**. Sie gehört zur einem Erklärvideo zum Kolmogoroff-Smirnov-Test (das natürlich auch inhaltlich lohnt und perfekt zum Thema passt):
https://www.youtube.com/watch?v=IsgCI8uhQ6M

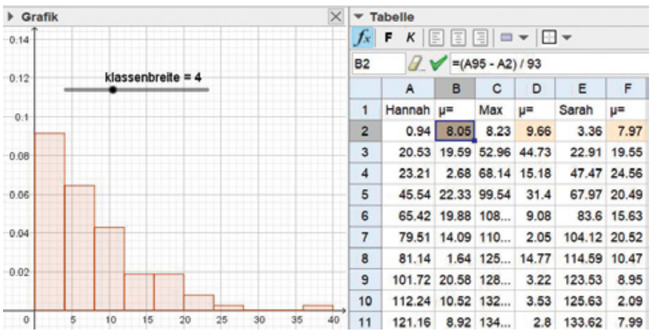


Abb. 1: Verteilung der „Ähs“ im Erklärvideo (**3-03-stopp-mit-wartezeiten.ggb**)

Hannah hat (in den Spalten A und B) in gut 750 Sekunden 93 „Ähs“ gestoppt, also im Mittel ca. 8 s auf das nächste gewartet. Der weniger aufmerksame Max (Spalten C und D) entdeckte beim gleichen Video nur 82 „Ähs“ und kommt auf eine mittlere Wartezeit von knapp 10 s. Sarah (Spalten E und F) dagegen war noch etwas aufmerksamer als Hannah.

Binnendifferenzierung

Arbeitsblatt 3, Aufgabe 3 wirft einen vertiefenden Blick auf die „Linearisierungsmethode“ der explorativen Datenanalyse, die über NQ-Plots für das Normalverteilungsmodell in GeoGebra integriert ist. Beim Prüfen auf Exponentialverteilung wird die empirische Verteilungsfunktion einfach logarithmiert – und je linearer die entstehende Punktwolke ist, desto besser passt das Exponentialverteilungsmodell.

Warten auf das nächste „Äh“

Die Situation

Die meisten Menschen überbrücken beim Sprechen Unsicherheiten und Denkpausen durch Füllsel wie „Äh“. Max stoppt, wie lange er bei Erklärvideos auf das nächste „Äh“ warten muss. Allgemein bezeichnet man das als „Warten auf das nächste Ereignis“ und die gestoppten Zeiten als Wartezeiten.

Darum geht es

Welche Form haben die Histogramme, die die Verteilung der Wartezeit beschreiben?

Das ist zu tun

1. Den Kontext verstehen

Max: „Wenn in einer 50-sekündigen Rede 6 „Ähs“ vorkommen, dann muss ich im Mittel ungefähr 50/6 ~ 8,3 Sekunden von einem auf das nächste „Äh“ warten.“

Erläutere den Gedanken an der nebenstehenden Skizze. Notiere dazu eine Beispielrechnung, in der du für die Zeiten t_1, t_2,…, t_6 Zahlenwerte einsetzt.

|…^……^………………..^.^……^……………………..^…|

0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 50

Bild 1: Die Rede enthält 6 ähs zu den Zeitpunkten t_1 … t_6. Es gibt 5 Wartezeiten $(t_2 - t_1)$, $(t_3 - t_2)$, …, $(t_6 - t_5)$. Der Mittelwert der fünf Wartezeiten ist $(t_6 - t_1)/5$ und dieser Wert entspricht (nicht ganz genau, aber ungefähr) 50/6.

2. Spekulieren

Wenn man in einer langen Rede (mit vielen „Ähs“, also auch mit vielen Wartezeiten) benachbarte Wartezeiten zu Klassen zusammenfasst und ein Histogramm zeichnet, könnte dies prinzipiell aussehen wie folgt:

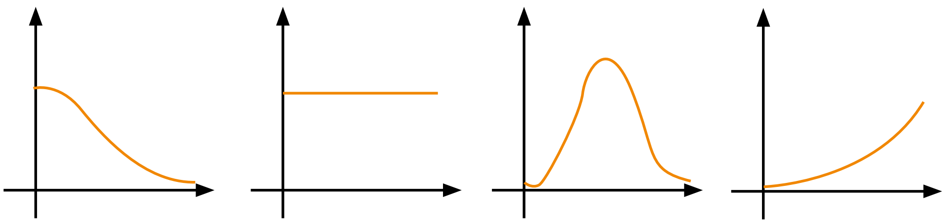


Bild 1: Skizzen hypothetischer Wartezeitenverteilungen

Fasst in Worte, welche Informationen die (angenommenen) Diagramme der Wartezeitenverteilung ausdrücken. Diskutiert miteinander, welche ihr für besonders plausibel haltet. Begründet eure Entscheidung.

3. Experimentieren

Vorbereitung: Probiert die Datei **3-03-stopp.ggb** aus. Sie ist eine Stoppuhr, die Zwischenzeiten (auf Millisekunden genau) misst und gleichzeitig in der Kalkulationstabelle speichert.

Jede Gruppe sucht nach einem Video, in dem viele „Ähs“ zu hören sind, und benennt eine Person als „Versuchleiter“, die runterzählt 3 – 2 – 1 – 0. Der „Versuchsleiter“ startet bei 0 das Video und alle in der Gruppe die eigene Stoppuhr. Immer wenn du ein „Äh“ hörst, speicherst du den Zeitpunkt des Auftretens durch Klicken. (Zur Stoppuhr: https://fr-vlg.de/1840008a36)

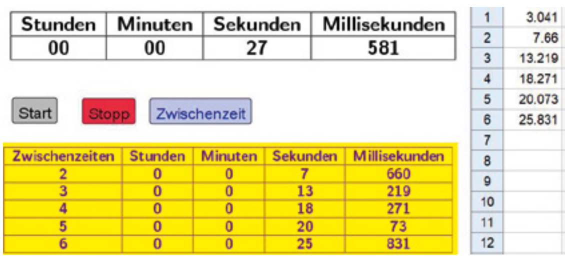


Bild 2: Stoppuhr zum Messen von Zwischenzeiten

4. Auswerten

i) Berechnet in Spalte B der Kalkulationstabelle die Differenzen der gestoppten Zeitpunkte, d. h. die Wartezeiten auf das jeweils nächste „äh“ (in Sekunden). Stellt in eurer Gruppe die Verteilung der Wartezeiten als Histogramm dar.

ii) Vergleicht eure Ergebnisse mit denen der anderen Gruppen. Benennt Gemeinsamkeiten. Entscheidet, welche der in **Bild 2** skizzierten Diagrammformen am besten zum „Warten auf das nächste Äh“ passt.

Die Exponentialverteilung und das „Äh“

Darum geht es

Die Mathematik arbeitet mit Modellen. In der Statistik beginnt das Modellieren mit dem Aufstellen von Wahrscheinlichkeiten. Es werden auch Funktionen benutzt, um Wahrscheinlichkeiten zu definieren. Wenn das „Warten auf irgendwas“ beschrieben werden soll, nutzt man *Exponential*funktionen. Und das geht so:

Wenn man bei der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot e^{-\lambda x}$ und $\lambda > 0$ speziell $c = \lambda$ setzt, dann erhält man
$f_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, und es gilt
(*) $\int_0^\infty f_\lambda(x)dx = [-e^{-\lambda x}]_0^\infty = 1$.
Diese 1 steht für die Wahrscheinlichkeit 100 %.
Dann ordnet man jedem Intervall [a; b] mit $a \geq 0$ die Wahrscheinlichkeit $\int_a^b f_\lambda(x)\,dx = [-e^{-\lambda x}]_a^b$ zu.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit *X*, die man auf das „Irgendwas“ warten muss, zwischen a und b liegt, wird in diesem Modell beschrieben durch
(**) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_\lambda(x)\,dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
Und immer gilt
(***) $P(X = c) = \int_c^c f_\lambda(x)\,dx = [-e^{-\lambda x}]_c^c = 0$.
Man spricht von der Exponentialverteilung und bezeichnet f_λ als Wahrscheinlichkeitsdichte.

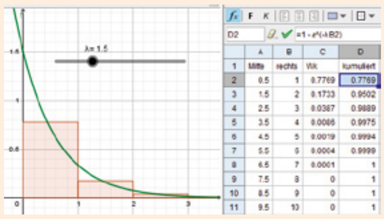


Bild 1: Exponentialfunktion mit Integralen

Das ist zu tun

1. Arbeiten im Modell

a) Erklären Sie einander die Aussagen des obigen Textes.
b) Begründen Sie (*) und (**) und (***), ggf. mithilfe von GeoGebra.
c) Stellen Sie die Beziehung her zwischen dem Text und den in Bild 1 sichtbaren Zahlen. Sie können sich vorstellen, dass die Abbildung beschreibt, wie lange (gemessen in Jahrzehnten) ein neues Fahrrad von seinem Besitzer genutzt wird. Das „Irgendwas“ steht in diesem Kontext dann für das Verkaufen, Verschenken oder Verschrotten des Fahrrades.
d) Hannah fragt nach der durchschnittlichen (in dem Modell erwarteten) Nutzungsdauer μ. Simon vermutet $\mu = 1/\lambda$. Prüfen Sie Simons Antwort.
e) Programmieren Sie eine „feinere“ Tabelle mit jährlicher Abstufung (Stufenbreite 0,1 – denn ein Jahr entspricht 0,1 Jahrzehnten) – oder arbeitsteilig noch feiner, z. B. mit monatlicher Abstufung – und überprüfen Sie so Simons Vermutung aus d), auch für andere Werte von λ.

2. Wartezeitenexperiment

a) Messen Sie in einem längeren Erklärvideo die Zeiten zwischen einem Füllwort („Äh“) bis zum nächsten. Notieren Sie diese Wartezeiten in einer Kalkulationstabelle und erstellen Sie ein zugehöriges Histogramm, bei dem die Flächen aller Säulen zusammen den Wert 1 haben. Bestimmen Sie die mittlere Wartezeit μ und die „Signaldichte“ $\lambda = 1/\mu$, die die Anzahl der „Äh“ je Sekunde angibt.
b) Plotten Sie den Graphen der zugehörigen Exponentialfunktion f_λ mit $f_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ und vergleichen Sie ihn mit dem Histogramm der Wartezeiten aus b), wobei Sie die Klassenbreite verändern können.
c) Beurteilen Sie die Brauchbarkeit des Exponentialverteilungsmodells zur Beschreibung des Wartens auf das nächste „Äh“.

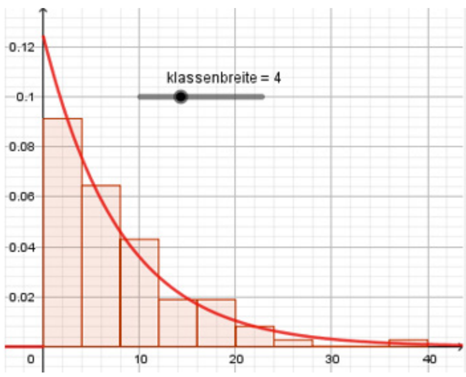


Bild 2: Verteilung der "Ähs" in einem Beispielvideo

Hier geht’s direkt zur Stoppuhr: https://fr-vlg.de/1840008a36

Ein Blick hinter die Kulissen

Darum geht es

Experimentell und theoretisch begründen: Wenn Ereignisse (wie das Füllwort „Äh“ in Erklärvideos oder Zeitpunkte von Telefonaten) gleichmäßig verteilt sind, dann sind die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen exponentialverteilt.

Das ist zu tun

1. Simulation

a) Erzeugen Sie (ggf. arbeitsteilig)
   - 100 Zufallsdezimalzahlen zwischen 0 und 1,
   - 200 Zufallsdezimalzahlen zwischen 0 und 2,
   - 300 Zufallsdezimalzahlen zwischen 0 und 3.

   Die Zahlen stehen für zufällige Ereigniszeitpunkte, und der Quotient $\lambda = \frac{100}{1} = \frac{200}{2} = \frac{300}{3} = \ldots$ ist die Ereignisdichte.

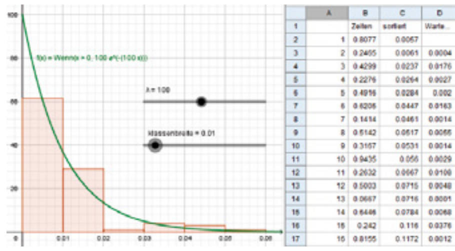


Bild 1: Simulationen

b) Sortieren Sie die Zufallszahlen aufsteigend.
   Bestimmen Sie die 99 (bzw. 199, bzw. 299 …) Differenzen benachbarter Zeitpunkte. Diese Differenzen stehen dann für 99 (bzw. 199, bzw. 299 …) Wartezeiten auf das nächste Ereignis.

c) Stellen Sie die Wartezeiten zusammen mit $f_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ in einem Histogramm dar (wie in **Bild 1**).

d) Prüfen Sie, dass der Mittelwert μ der Wartezeiten in der Nähe von $1/\lambda = 0{,}01$ liegt. Erläutern Sie, warum die Simulation bestätigt, dass die Exponentialverteilung ein gutes Modell für die Verteilung der Abstände ist.

2. Theorie

a) Lassen Sie $\lambda = 100$ Zufallszahlen zufällig auf das Intervall [0; 1] fallen. Begründen Sie:
   Die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall [0; x] keine einzige Zufallszahl liegt, ist $(1 - x)^{100}$.

b) Nun lässt man 200 Zufallszahlen auf das Intervall [0; 2] fallen. Begründen Sie:
   Die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall [0; x] keine einzige Zufallszahl liegt, ist nun $(1 - \frac{x}{2})^{2 \cdot 100}$; und wenn man $b \cdot 100$ Zufallszahlen auf [0; b] fallen lässt, liegen mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \frac{x}{b})^{b \cdot 100} \approx e^{-100x} = e^{-\lambda x}$ keine Zahlen in [0; x].
   Folgern Sie: Wenn eine Zahlengerade gleichmäßig mit $\lambda = 100$ Zufallszahlen je Einheit „bevölkert“ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abstand X zweier aufeinanderfolgender Zahlen („die Wartezeit“)
   i) größer ist als x, gegeben durch $P(X > x) = e^{-\lambda x}$,
   ii) zwischen a und b liegt, gegeben durch $P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} = \int_a^b f_\lambda(x)\,dx$.

3. Mögliche Vertiefung

Die Güte des Exponentialverteilungsmodells prüft man durch Vergleich der empirischen Verteilungsfunktion (die entsteht, indem man jeder gemessenen Wartezeit x den Anteil H(x) der noch größeren Wartezeiten zuordnet) mit der Verteilungsteilungsfunktion $F(x) = P(X > x) = e^{-\lambda x}$.
Noch effektiver wird die Prüfung des Modells, wenn man die empirische Verteilungsfunktion logarithmiert und ln(H(x)) mit $\ln(F(x)) = -\lambda x$ vergleicht. Falls die Daten tatsächlich exponentialverteilt sind, streuen die Punkte des Graphen von ln(H(x)) um eine Gerade g mit $g(x) = -\lambda x$, aus deren Steigung man den Parameter λ schätzen kann.
Untersuchen Sie, wie gut die simulierten Daten und die gemessenen Wartezeiten eine solche Prüfung bestehen.

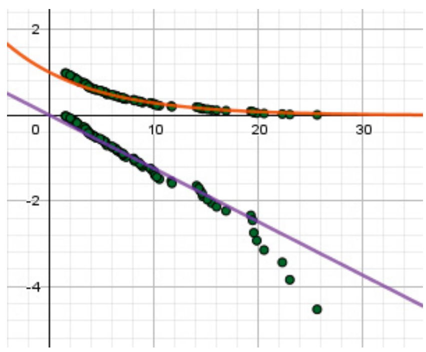


Bild 2: Oben: empirische und theoretische Verteilungsfunktion; unten: beides logarithmiert

Tipp: Wenn 200 Wartezeiten im Bereich B1:B200 liegen, dann ist `(B7;ln(ZähleWenn(x>B7,B$1:B$200)/200))` ein Punkt des Graphen von ln(H).

GeoGebra-Dateien als Universalwerkzeuge

Folgende Dateien eignen sich als Werkzeuge für typische Aufgaben in der Stochastik:

1-04-universalauswertungs-tool.ggb
1-07-binomialverteilungs-tool.ggb
1-11-stoppuhr.ggb
2-02-quader-auswertungsvorlage.ggb
2-03-punktsummen.ggb
2-06-dreibeutel.ggb
2-07-gesetz-der-grossen-zahlen.ggb
2-07-wette-absolut.ggb
2-07-wette-relativ.ggb
2-08-wurzeltrichter-ellipse.ggb
2-08-prognose-konfidenzintervall-tool.ggb
2-10-signifikanztest-tool.ggb
3-02-reaktionstest-blanco.ggb
3-03-stopp.ggb

Diese Dateien finden Sie noch einmal im separaten Ordner „Universalwerkzeuge“ und unter https://fr-vlg.de/1840008a1.

Vertiefungen, für die in diesem Heft kein Platz mehr war, findet man bei www.riemer-koeln.de. Da gibt es neben Quaderwürfeln auch die schiefen Glücksräder.

Literatur

Amrhein, V./Greenland, S./McShane, B. (2019): Retire statistical significance. – In: Nature 567, S. 305 – 307.

Henze, N. /Vehling, R. (2017a): Eine möglichst große Augensumme, aber bitte ohne Sechs! – – In: Stochastik in der Schule, Bd. 37, Heft 2/2017.

Henze, N. /Vehling, R. (2017b): Der verwirrende Siegeszug des Histogramms in deutschen Klassenzimmern: Sind Stabdiagramme tot?– In: Der Mathematikunterricht 1/2015, S. 1–10.

Henze, N, Hotz, T. Riemer, W. Skorsetz, B, Vehling, R. (2020): Schickt die statistische Signifikanz in den Ruhestand. Der Mathematikunterricht 4/2020, S. 4 –10.

Herget, W. (1995/2008): Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall – In: mathematik lehren 85, S. 3 – 8 / Wege in die Stochastik, Sammelband mathematik lehren, S. 42 – 47.

Riemer, W. (2009): Warum sich Ergebnisse so oft häufen. – In: mathematik lehren 153, S. 56-60.

Riemer, W. (2012): Lernen aus Erfahrung. Ein „Fünfminuten-Experiment“ zum Hypothesentesten – In: Praxis der Mathematik 48, S. 25.

Riemer. W. (2012): Stetige Zufallsgrößen: Mit Dartwerfen durch das Tor der Analysis in die Stochastik. - Praxis der Mathematik 48, S. 20 – 24.

Riemer, W. (2014): Erziehen im Mathematikunterricht: Mit GeoGebra zu den klassischen Tugenden der Elementargeometrie: Konstruieren statt Fummeln – exakt beschreiben – sauber zeichnen. – In: Kaenders, R./Schmidt, R.: Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen, 2. Aufl. Springer. S. 32 – 40.

Riemer, W. (2016): Mit Quadern würfeln. – In: Mathematik 5-10, Ausgabe 36, S. 23 – 25.

Riemer, W. (2017): Das Glücksrad auf der schiefen Ebene. – In: MUED Festschrift 2017.

Riemer, W. (2020): Auf der Suche nach H_0 – In: mathematik lehren 220, S. 30 – 34.

Vehling, R. (2019): Beschreibende Statistik mit eigenen Daten. – In: mathematik lehren 213, S. 38 – 43.

GeoGebra

Wichtige GeoGebra-Befehle aus dem Bereich der Stochastik

Befehl	**Erläuterungen**
=nCr(n,k)	Berechnung von $\binom{n}{k}$
=Binomial(n,p) bzw. Binomial(n,p,false)	Säulendiagramm einer Binomialverteilung $B_{n;p}$
=Binomial(n,p,true)	Diagramm der kumulierten Binomialverteilung $F_{n;p}$
=Binomial(n,p,k,false) =Binomial(n,p,k,true) =Binomial(n,p,a...b)	$P(X = k)$ $P(X \leq k)$ $P(a \leq X \leq b)$
=InversBinomial(n,P,α)	kleinste ganze Zahl k mit $P(X \leq k) \geq \alpha$
=Normal(μ,σ,x,false)	Dichte $\varphi_{\mu;\sigma}$ der Normalverteilung (Gauß-Glocke)
=Normal(μ,σ,x,true)	zu $\varphi_{\mu;\sigma}$ gehörige Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu;\sigma}$
=InversNormal(μ,σ,p)	Stelle x mit $P(X \leq x) = p$.
=Zufallszahl(a,b)	ganzzahlige Zufallszahl x mit $a \leq x \leq b$ Münze: =Zufallszahl(0,1); Würfel: =Zufallszahl(1,6)
=ZufallszahlBinomialverteilt(n,p) =ZufallszahlBinomialverteilt(n,p)/n =Folge(ZufallszahlBinomialverteilt(n,p),i,1,k)	binomialverteilte Zufallszahl relative Trefferhäufigkeit bei n Bernoulli-Versuchen k binomialverteilte Zufallszahlen (Liste)
=ZufallszahlDiskret(L_1,L_2)	Zufallszahl: Ergebnisliste L_1, Wahrscheinlichkeitsliste L_2 =ZufallszahlDiskret({1,2,3},{0.5,0.2,0.3}): Glücksrad mit drei Feldern und zugehörigen Wahr- scheinlichkeiten
=ZufallszahlGleichverteilt(a,b) =ZufallszahlGleichverteilt(a,b,n)	gleichverteilte „dezimale“ Zufallszahl x mit $a \leq X \leq b$ n gleichverteilte „dezimale“ Zufallszahlen x mit $a \leq X \leq b$ (Liste)
=ZufallszahlNormalverteilt(μ,σ)	$\varphi_{\mu;\sigma}$-normalverteilte Zufallszahl
=Folge(Zufallszahl(a,b)+Zufallszahl(a,b), i,1,n) =Summe(Folge(Zufallszahl(0,1)==1,i,1,10))	n Summen zweier (ganzzahliger) Zufallszahlen zwi- schen a und b (Liste); für a = 1, b = 6: n Augensummen zweier Würfel ersetzt den Befehl =ZufallszahlBinomial(10,0.5)
=Stichprobe(L,n,true/false)	Aus der Liste L werden n Elemente mit (true)/ohne (false) Zurücklegen ausgewählt. Spezialfall: =Stichprobe({1,2,3},3,false) liefert eine Permutation der Zahlen 1, 2 und 3
=Mittelwert(L)	arithmetisches Mittel der Zahlenliste L
=stdevp(L)	Standardabweichung einer Grundgesamtheit L: Liste, „Division durch n“
=stdev(L)	Standardabweichung einer Stichprobe L: Liste, „Division durch n – 1“
=Säulendiagramm(L,b) =Säulendiagramm(L_1,L_2,b)	Säulendiagramm zu einer Urliste L; b: Balkenbreite Säulendiagramm zu einer Häufigkeitsverteilung mit L_1: Datenliste; L_2: Häufigkeitsliste; b: Balkenbreite
K=Klassen(L,n) K=Klassen(L,a,b) =Histogramm(K,L)	Die Daten aus L werden eingeteilt (i) in n Klassen, (ii) in Klassen der Breite b, Start bei a. Histogramm der Daten L gemäß Klasseneinteilung (s. o.)
=Boxplot(y-Position,y-Breite,L,true/false)	Boxplot zur Datenliste L auf vorgegebener y-Position mit vorgegebener y-Breite, mit/ohne Ausreißer
L=A1:A100	Tabellenkalkulationsbereiche werden zu Listen

mathematiklehren

GeoGebra

In einem zeitgemäßen Stochastikunterricht steht die fachliche Systematik am Ende eines Lern- und Erkenntnisprozesses, in dessen Mittelpunkt spannende Fragen und das Bewältigen kognitiver Konflikte stehen.
Dabei ist es viel schwieriger, Schülerinnen und Schülern (auch in Form konkreter Arbeitsblätter) Fragen und Probleme zu „schenken“, an deren Erforschung und Bearbeitung sie wachsen sowie tragfähige Grundvorstellungen handelnd (nicht nur „klickend“) und reflektierend entwickeln können, als eine fertige Systematik „einzuführen“.
Dieser Sichtweise folgend, finden Sie hier deutlich mehr als eine bloße „Arbeitsblättersammlung“: Sie halten mit **Stochastik erkunden** eine unterrichtspraktisch ausgefeilte, handlungsorientierte „Didaktik der Stochastik“ in den Händen.
Ganz konkret lässt sich unsere Philosophie gelingenden Stochastikunterrichts durch wenige Paradigmen umschreiben:

- Verwenden Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsbegriff.
- Trennen Sie Modell und Realität – messerscharf und konsequent.
- Untersuchen Sie Zufallsschwankungen, anstatt sie wegzuwünschen.
- Stellen Sie nicht nur Aufgaben, sondern echte Fragen, die durch Experimente beantwortet werden: *Spekulieren - Experimentieren - Reflektieren.*
- Nutzen Sie Software – nicht nur zur Individualisierung, sondern auch zur Verlangsamung, als Anlass zu sinnstiftendem und begriffsbildendem Kommunizieren nach dem Motto: „Einer klickt und alle denken ist besser als alle klicken und keiner denkt.“

Stochastik erkunden – Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra gliedert sich in drei Kapitel, die mit vielen Querverweisen, Vertiefungsliteratur sowie Lösungs- und Anleitungsdateien zum Download auch unabhängig voneinander eingesetzt werden können:

Kapitel 1: „Grundlagen“ zeigt an leicht nachvollziehbaren Anwendungsbeispielen die Bedienung von GeoGebra als Rechen-, Simulations- und Visualisierungswerkzeug.

Kapitel 2: „Ready to teach“ erschließt zentrale curriculare Themen problemlösend über interessante Fragen – aufbereitet über direkt einsetzbare Arbeitsblätter.

Kapitel 3: „Projekte“ enthält Materialien zur vernetzenden Vertiefung. Hier finden Sie sowohl alternative Zugänge zu Inhalten, die in Kapitel 1 und 2 angesprochen wurden, als auch spannende Themen.

Die **GeoGebra-Dateien** stehen zum Download bereit und können über im Heft abgedruckte QR-Codes auch direkt im Internet abgerufen werden. Mit den exakt auf die Aufgaben zugeschnittenen Dateien kann bei Bedarf (vielfach auch ohne GeoGebra-Vorkenntnisse) inhaltlich zielgerichtet gearbeitet werden.

Einzelverkauf
d1840008

Schullizenz
d1840009