Das Glücksrad auf der schiefen Ebene

Klassenstufe 7 bis 13

Darum geht es
Überraschende Wahrscheinlichkeiten
Modellierungskreislauf: Hypothesen bezweifeln/revidieren
stetige Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsdichte,
beurteilende Statistik

Lernvoraussetzungen
SI: Prozentbegriff
SII: Signifikanztests, Konfidenzintervalle
ggf. physikalische Grundbegriffe

Idee (SI und SII)
Glücksräder kennt man vom Jahrmarkt. Im Stochastikunterricht dienen sie als Beispiele für Laplace-Experimente und geometrische Wahrscheinlichkeiten. Man experimentiert aber nicht mit ihnen, weil man wegen der Symmetrie weiß, was dabei herauskommen wird und weil kommerzielle Räder lange rotieren und das Experimentieren zeitaufwändig wird.

Verwendet man aber eine einfache Haarklemme, die man um einen Pin rotieren lässt, braucht das Glücksraddrehen nicht länger als das Würfeln, weil die Klemme wegen der Reibung schnell stoppt. Wenn man die Unterlage (Buchdeckel) schief stellt, entsteht (unserem Paradigma Spekulieren-Experimentieren-Reflektieren-Theoretisieren entsprechend) eines der spannendsten und überraschendsten Experimente, das der Stochastikunterricht zu bieten hat. In Bild 1 auf AB A wird statt des Buchdeckels ein Sperrholzbrettchen mit Klebeetikett verwendet.

Ergebnis
Beim **Spekulieren** werden in der Regel Wahrscheinlichkeiten wie nebenstehend genannt. „Die Wahrscheinlichkeit rutscht nach unten - die Frage ist nur wie stark. Rechts und links ist es gleich."

Beim **Experimentieren** vereinbart man eine feste Drehrichtung „im Uhrzeigersinn" und Start im unteren Feld 6. Es muss so kräftig geschnippt werden, dass die Haarklemme vor dem Anhalten mindestens zwei volle Umdrehungen absolviert. Beim Zusammenfassen der Ergebnisse zeigt sich dann wider alle Erwartung:

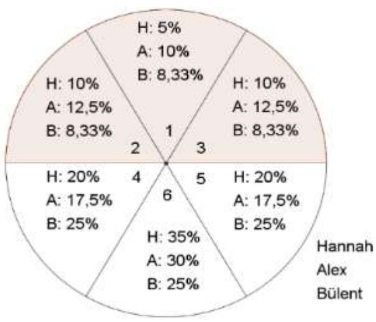


Abb. 1: Schätzungen

(1) die Neigung hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten der Felder 1 und 6,
(2) die „bergauf" Felder 2 und 4 sind gleich wahrscheinlich, ebenso die bergab-Felder 3 und 5.
(3) Die Wahrscheinlichkeit, die bergauf zu 1/6 dazukommt, fehlt bergab.

Im Nachhinein verstehen auch Siebtklässler die Begründung. Nikita formuliert es so: *„Da wo es bergauf geht, bremst es und die Klemme bleibt eher stehen. Und weil es bei 2 und 4 gleichviel bergauf geht, sind die Wahrscheinlichkeiten dort gleich. Bergab ist es genauso, nur dass es da weniger bremst - und zwar genauso viel weniger wie bergauf mehr. Und bei 1 und 6 geht es nicht bergauf, deswegen ist es da 1/6 wie wenn das Brett gerade liegt."*

Als überraschende Konsequenz ergibt sich: Bei zufälliger Wahl der Drehrichtung hat die Neigung keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten. Es bleibt bei einem Laplace-Glücksrad.

Die experimentellen Ergebnisse passen für nicht zu große Steigung ausgezeichnet zur Theorie. Die Haarklemme muss nur bergab überall sicher anhalten können. Sie darf also nicht von selber ins Rutschen geraten. Das ist auf Papier bis zu einer Steigung von ca. 35% gegeben, bei glatter Laminierung bis 20%.

Zu den Arbeitsblättern
Blatt A eignet sich für alle Jahrgangsstufen. Hier wird spekuliert und experimentiert. Es. Beim Sammeln der Ergebnisse empfiehlt sich das Diktieren der Häufigkeiten in die gemeinsame Vorlage schnippsen.ggb, die die Ergebnisse (auch gruppenweise) zusammenfasst und visualisiert. Hier ein Auswertungsbeispiel:

Ergebnisse in 5er-Gruppen:											
Name	1	2	3	4	5	6		1+2+3	2+3	4+5	1+6
mira	23	25	9	30	13	20	120	57	34	43	43
laura	14	30	17	32	12	15	120	61	47	44	29
ragnar	19	29	6	22	21	23	120	54	35	43	42
Ümü	21	25	5	33	7	29	120	51	30	40	50
richard	21	31	15	22	8	23	120	67	46	30	44
absolute H.	98	140	52	139	61	110	600	290	192	200	208
%	16%	23%	9%	23%	10%	18%	1	48%	32%	33%	35%

Abb. 2: Auswertungsvorlage schnippsen.ggb

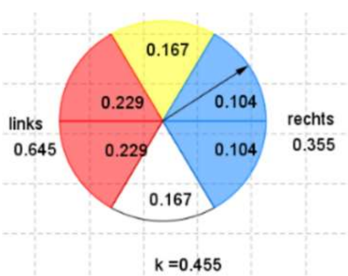


Abb. 3 optimales Wahrscheinlichkeitsmodell nach 11200 Versuchen

Zu Blatt D
Die beim anfänglichen Spekulieren aufgestellten Vermutungen bieten Material für plausible Hypothesen, die mit den gängigen (abiturrelevanten) Signifikanztests oder auch mithilfe von Konfidenzintervallen geprüft werden können. In Blatt D werden diese Verfahren an einem vorgegebenen Datensatz gefestigt und eingeübt.

Ungleich spannender (und fachlich sauberer) ist aber die Berechnung kritischer Bereiche *vor* dem Experimentieren (mit vorab geplantem Stichprobenumfang). Der anschließende Vergleich mit den experimentellen Daten und das „Zusammenbrechen" vermeintlicher Gewissheiten hat eine für den Mathematikunterricht seltene affektive Komponente, die man auskosten sollte.

Die Rechnungen die beim Durchführen der Testverfahren anfallen, kann man direkt in die Auswertungsdatei integrieren, so wie dies in der Lösungsdatei schnipsenbeurteilen.ggb vorgeschlagen wird.

Ergebnisse (vgl. 2 und 3, Vorseite) :
Die Hypothese einer „rechts-links" Symmetrie kann man beim Schnippen im Uhrzeigersinn oft schon nach 120 Versuchen bezweifeln, die Hypothese einer „oben-unten" Symmetrie hält dagegen allen Tests stand, auch nach etlichen tausend Versuchen.
Das gilt auch für den Chi-Quadrat Test auf Gleichverteilung, wenn man die Ergebnisse 1-6, 2-3 und 4-5 zu drei Ereignissen zusammenfasst (zwei Freiheitsgrade, kritische 95% Grenze ≈ 6)
Alternativ kann man gleich oft im und gegen den Urzeigersinn schnippen und dann auf Gleichverteilung aller Felder 1-6 prüfen (5 Freiheitsgrade, kritische 95% Grenze ≈ 11).

Zu **Blatt B**
Wenn es in der SII um stetige Zufallsgrößen geht, lässt sich die Endposition $0<x\leq 2\pi$ des Zeigers ausgezeichnet beschreiben durch die Wahrscheinlichkeitsdichte
$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2\pi}\,(1 + k\,sin(x))}$$
mit Verteilungsfunktion
$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\,(x - k\cos(x) + k).$$
Dabei liegt x=0 wieder unten und der Zeiger rotiert im Uhrzeigersinn. Der Parameter *k* ist proportional zur Steigung tan(α) der schiefen Ebene. Man kann ihn durch Abgleich mit den experimentellen Ergebnissen bestimmen. *k* ≈ 0,4 ist bei 10% Steigung eine gute Wahl.
In Blatt B werden die Funktionsterme vorgegeben und in den Aufgaben in Abhängigkeit vom Parameter *k* inhaltlich interpretiert.
Die Datei **sinusdichte.ggb** zeichnet die Dichtefunktion, die Verteilungsfunktion und die sich daraus ergebenden Wahrscheinlichekeiten der sechs Felder des Glücksrades in Abhängigkeit vom Parameter *k*.

Desweiteren gelingt es, mithilfe der Dichte die Grenzen der sechs Felder so zu verschieben, dass sie gleich wahrscheinlich werden, dass man trotz der Neigung ein Laplace-Glücksrad erhält.

In Blatt C
begründen interessierte Schülerinnen und Schüler den Term der Wahrscheinlichkeitsdichte über Energiebetrachtungen mithilfe der Physik der schiefen Ebene. Dieses Blatt eignet sich auch für ein Referat oder als Einstieg in eine Facharbeit, in der man untersuchen kann, wie sich die Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn man die Steigung so erhöht, dass der Zeiger bergab nicht mehr überall sicher anhält.

Zur Vertiefung empfohlen: Riemer, W. [2017]: Das Glücksrad auf der schiefen Ebene. In Maitzen, S., Warmeling, A. (Hrsg.) Mathe aus dem Leben – für das Leben. MUED Festschrift 2017 ISBN 978-3-930197-90-3.

Glück auf der schiefen Ebene A

Darum geht es
Überraschende Wahrscheinlichkeiten

1 Spekulieren

Wenn man durch kräftiges Schnippen eine Haarklemme vom Startfeld 6 aus im Uhrzeigersinn rotieren lässt, erhält man ein Laplace-Glücksrad, das auf allen Feldern mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 1/6 stehen bleibt. Ein solches Glücksrad wird durch Anheben des Feldes 1 um 10% geneigt wie in Abb. 1. Schätze, wie sich die Wahrscheinlichkeiten durch das Schiefstellen verändern.

	1	2	3	4	5	6
%						

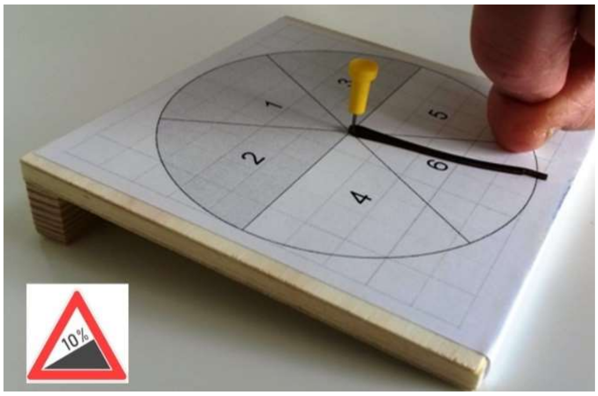


Bild 1: gegenüberliegende Felder haben die Summe 7

2 Argumentieren

Diskutiert über die folgenden Hypothesen, fügt eigene hinzu und stimmt dann in der Klasse ab.

Nora: Die untere Hälfte mit den Feldern 4, 5 und 6 wird wahrscheinlicher, weil die Wahrscheinlichkeit nach unten rutscht. Das ist wie bei einem schief liegenden Fahrrad mit dem Ventil. Am wahrscheinlichsten liegt das Ventil unten, am wahrscheinlichsten ist die 6.	Simon: Die Klemme hält am wahrscheinlichsten, wo sie am meisten gebremst wird, also bergauf bei 2 und 4. Die Bremswirkung der Felder 1 und 6 ändert sich durch das Schiefstellen nicht. Es bleibt dort bei der Wahrscheinlichkeit 1/6.
Niko: Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich bei einer Neigung von 10% nicht, weil die Haarklemme nirgendwo ins Rutschen kommt. Es bleibt bei 1/6 für jedes der sechs Felder.	Balthasar: Die 5 wird am wahrscheinlichsten, weil da der Zeiger vom Startfeld 6 aus am längsten unterwegs war. Die Wahrscheinlichkeiten nehmen in der Reihenfolge 6-4-2-1-3-5 zu.
Ina: Bergauf (bei 2 und 4) nimmt die Wahrscheinlichkeit um genau so viel zu wie sie bergab (bei 3 und 5) abnimmt.	Micha: Die oberen Felder 1 und 2 sind am wahrscheinlichsten, weil Uhren bei leerer Batterie mit dem Minutenzeiger auch immer oben kurz vor 12 Uhr stehen bleiben

3 Experimentieren

a) Bildet Fünfergruppen. Jeder schnippt sein Glücksrad 120-mal von unten im Uhrzeigersinn. Zählt die Ergebnisse mit Strichlisten aus und fasst sie mithilfe von **schnippsen.ggb** in eurer Gruppe zusammen.

Name	1	2	3	4	5	6
absolute H.						
%						

Abb. 2: schnippsen.ggb

b) Vergleicht eure Gruppenergebnisse mit den sechs Hypothesen aus 2 und entscheidet, welche brauchbar sein könnten, welche nicht und stellt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf, auf die ihr euch verständigen könnt. Vergleicht mit anderen Gruppen.

c) Fasst die Ergebnisse der ganzen Klasse zusammen und bearbeitet Aufgabenteil b) erneut.

d) Stellt eine Hypothese darüber auf, wie sich die Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn man die Steigung auf 20% verdoppelt und überprüft diese Hypothese durch ein weiteres Experiment.
Natürlich ist es auch möglich, die Arbeit zu teilen, so dass einige Fünfergruppen mit der Steigung 10%, andere von Anfang an mit der Steigung 20% experimentieren.

Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion B

Darum geht es

Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion des schiefen Glücksrades kennen lernen und nutzen.

Der Zeiger des Glücksrades lässt sich durch einen Punkt beschreiben, der im Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis rotiert. Die Position $\boldsymbol{\varphi}$, auf der er stehen bleibt, ist dann eine stetige Zufallsgröße, deren Werte im Intervall (0;2π] liegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er „vor der Stelle x" stehen bleibt wird beschrieben durch die Verteilungsfunktion $\boldsymbol{P(\varphi \leq x) = F(x) = \frac{1}{2\pi}(x - k\cos(x) + k)}$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + k\sin(x))}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad im Intervall [a;b] hält, ist dann

$$P(a \leq \varphi \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2\pi}[x - k \cdot cos(x)]_a^b$$

$k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$ (0≤*k*≤1) ist eine Materialkonstante, wobei $\tan(\alpha)$ die Steigung des Glücksrades ist und ρ angibt an, wieviel Prozent des Gewichts den Zeiger durch Reibung bremsen.

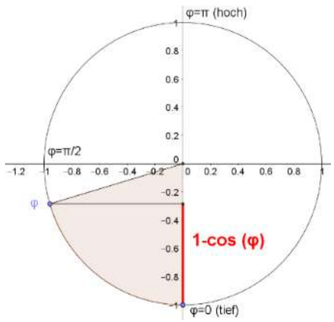


Bild 1: schiefes Glücksrad von oben gesehen
((neu machen oder in Abb. 2 integrieren))

a) Prüfe, dass f tatsächlich alle Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte hat.

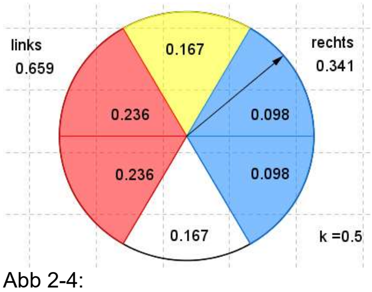
b) Zeichne die Wahrscheinlichkeitsdichte f und die Verteilungsfunktion F in Abhängigkeit von k (Schieberegler). Erläutere die Bedeutung der Extremstellen und was es bedeutet, wenn f bei k=1 eine Nullstelle besitzt. Erstelle dazu eine Datei **glücksdichte.ggb**

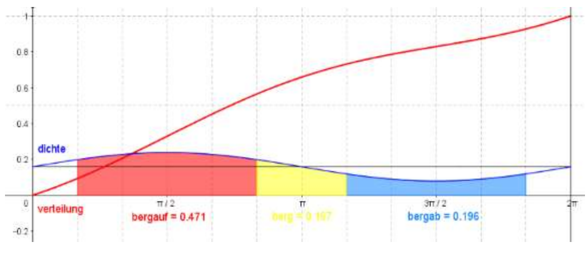
c) Ergänze die Datei so, dass die Wahrscheinlichkeiten der sechs Glücksrad-Felder in Abhängigkeit von k berechnet werden, ebenso die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass es links bzw. rechts stehen bleibt. Vergleiche mit Bild 2 für k=1/2,

d) Variiere k so, dass die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten optimal zu den beobachten relativen Häufigkeiten passen. Du kannst nach Augenmaß arbeiten oder die Summe $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{6}(p_k(i) - h(i))^2}$ minimieren.

1	2	3	4	5	6
280	332	231	378	209	290
16.3%	19.3%	13.4%	22.0%	12.2%	16.9%

e) „Kann man das Glücksrad nicht anders unterteilen, vielleicht so wie in Abb. 4, dass alle Felder trotz der Steigung beim Schnippen im Uhrzeigersinn - wie bei Laplace - mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 1/6 kommen?" fragt Hannah. Erläutere, was sich Hannah denkt und nutze GeoGebra um ihre Frage zu beantworten.





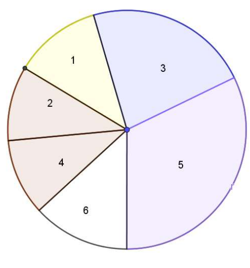


Abb 2-4:
Wahrscheinlichkeiten für k=0,5

zugehörige Dichte/Verteilunsfunktion

Hannas Laplace-Unterteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte physikalisch begründen C

Darum geht es

Durch Energiebetrachtungen wird begründet: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger bergauf, also irgendwo in (0;π], stehen bleibt, ist $\boldsymbol{P(\varphi \leq \pi) = \frac{1}{2} + \frac{k}{\pi}}$ mit $\boldsymbol{k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}}$. Eine Verallgemeinerung führt zur Verteilungsfunktion $\boldsymbol{P(\varphi \leq x) = \frac{1}{2\pi}(x - k\cos(x) + k)}$ und der Wahrscheinlichkeitsdichte $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + k\sin(x))}$.

Reibungsenergie geht verloren

Wenn ein Massenpunkt (hier der Schwerpunkt der Haarklemme), auf einer *horizontalen* Fläche rutscht, ist die Reibung proportional zum Gewicht G. Die Proportionalitätskonstante ρ gibt an, wieviel % des Gewichts als Bremskraft wirken.
Beim Rutschen auf einer *schiefen* Ebene zählt aber nicht das ganze Gewicht G, sondern nur die Komponente $G_\perp = G \cdot \cos(\alpha)$ die senkrecht auf die Ebene drückt (Bild 1). Die Reibung, die die Haarklemme, bremst ist damit $\rho \cdot G \cdot \cos(\alpha)$.
Physiker berechnen die durch Reibung verlorene Bewegungsenergie als Produkt Bremskraft · Weg.
Der Massenpunkt verliert damit bei jeder Halbumdrehung bergauf und bergab durch Reibung gleichviel Energie $E_\uparrow = E_\downarrow = G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi$ und beim Überstreichen aller Felder während jeder Vollumdrehung: $E_o = G \cdot \cos(\alpha) \cdot 2\pi$.

In der *letzten* – entscheidenden - Runde hat der Massenpunkt daher im Start (φ = 0) eine Bewegungsenergie E_{kin} mit $0 < E_{kin} \leq E_o$. Hätte er mehr Energie, würde sie ja eine weitere Runde beginnen.

Wir nehmen nun an, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der der Massenpunkt in einem Feld stehen bleibt, proportional ist zu dem Anteil (an E_o) der Bewegungsenergie die in diesem Feld abhandenkommt.

Lageenergie kommt zurück

Im der bergauf-Hälfte kommt aber durch das Ansteigen und die damit einhergehende Umwandlung in Lageenergie noch mehr Bewegungsenergie abhanden als nur durch die Reibung.
Der Massenpunkt hat oben bei $\varphi = \pi$ die Höhe $h = 2 \cdot \sin(\alpha)$, also die Lageenergie $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot G$.
(auch hier berechnet sich die Energie als Produkt aus Gewichtskraft und zurückgelegtem Weg (=Höhe)
Deswegen verringert sich die Bewegungsenergie
bergauf um $G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi + 2G \cdot sin(\alpha)$ und
bergab um $G \cdot \cos(\alpha) \cdot \pi - 2G \cdot sin(\alpha)$.
In der bergab-Hälfte kommt die gespeicherte Lageenergie nämlich zurück, da sie nach dem Energieerhaltungssatz im Gegensatz zu Reibungsenergie nicht verloren geht

a) Begründe hiermit durch eine Termumformung: Die Anteile an E_o sind bergauf $\frac{1}{2} + \frac{k}{\pi}$ bergab $\frac{1}{2} - \frac{k}{\pi}$ mit $k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$.

b) Begründe mithilfe von Bild 2 für ein beliebiges Intervall $0 < \varphi \leq x$:
Wenn der Massenpunkt den Bogen $0 < \varphi \leq x$ überstreicht, dann verringert sich seine Bewegungsenergie um $\rho \cdot G \cdot \cos(\alpha) \cdot x + G \cdot (1 - \cos(x)) \cdot sin(\alpha)$.
Konrolliere für $x = \pi$ und $x = 2\pi$.

c) Begründe: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger im Bogen $0 < \varphi \leq x$ stehen bleibt, ist $F(x) = P(\varphi \leq x) = \frac{1}{2\pi}(x + k(1 - \cos(x)))$.
Kontrolliere: für $x = \pi$ ergibt sich der Wert aus a).

d) Begründe mit c) den Term der Wahrscheinlichkeitsdichte f(x) = $\frac{1}{2\pi}(1 + k\sin(x))$ mit $k = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$.

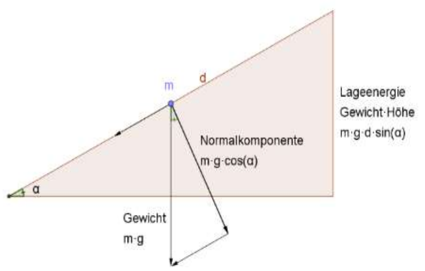


Bild 1: schiefes Glücksrad von der Seite.
Die Hypotenuse des Steigungsdreiecks ist der Durchmesser des Einheitskreises: d = 2 ((überarbeiten))

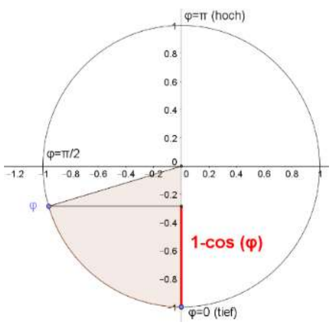


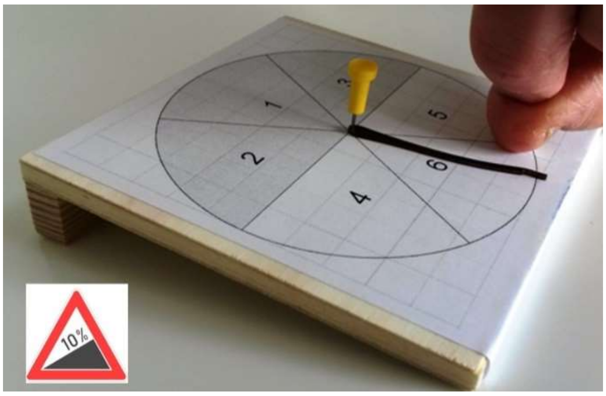
Bild 2: schiefes Glücksrad von oben gesehen

Das schiefe Glücksrad und beurteilende Statistik D

Darum geht es
Signifikanztests, Konfidenzintervalle,
ggf. Chi-Quadrat Test

Was ist H_0?
- Bei einseitigen Signifikanztests testet man entweder linksseitig H_0: $p \geq p_0$ gegen H_1: $p < p_0$ oder rechtsseitig H_0: $p \leq p_0$ gegen H_1: $p > p_0$
- Bei zweiseitigen Signifikanztests testet man H_0: $p = p_0$ gegen H_1: $p \neq p_0$

Aus der Werkzeugkiste
- Wenn mit Fehlentscheidungen Kosten verbunden sind, ist H_0 ist die Hypothese, deren fälschliches Verwerfen die schlimmeren Folgen hat
- Wenn mit einer Fehlentscheidung keine Kosten verbunden sind und man nur eine Vermutung absichern möchte, ist H_0 das Gegenteil von dem, was man vermutet. Wenn man H_0 dann verwerfen kann, sichert das die Vermutung ab.



1	2	3	4	5	6
280	332	231	378	209	290
16.3%	19.3%	13.4%	22.0%	12.2%	16.9%

Bild 1: Ergebnis aus 1720 Versuchen

Vermutungen
- Nora: Die untere Hälfte mit den Feldern 4, 5 und 6 wird durch das Schiefstellen wahrscheinlicher als die obere Hälfte, weil die Wahrscheinlichkeit durch das Schiefstellen „nach unten rutscht“.
- Simon: Die Klemme hält bergauf (bei 2 und 4) wahrscheinlicher als bergab (bei 3 und 5), „weil bergauf bremst“.
- Klara: Die Wahrscheinlichkeiten der Felder 1 und 6 ändert sich durch das Schiefstellen nicht. Es bleibt dort jeweils bei der Wahrscheinlichkeit 1/6 und zusammen bei 1/3.
- Micha: Die Felder 2 und 3 haben zusammen die Wahrscheinlichkeit 1/3.

1 Signifikanztest
Nora, Simon, Micha und Niko möchten ihre Vermutungen durch je einen Signifikanztest auf dem 5% Signifikanzniveau überprüfen.
a) Sollten Sie einseitig oder zweiseitig testen? Formuliere jeweils eine passende Nullhypothese.

b) Bestimme den zugehörigen Ablehnungsbereich.

c) Gib an, zu welchem Ergebnis der Test führt.
Nutzt die Daten aus Bild 1 - oder besser eigene, falls ihr (evtl. arbeitsteilig mit anderen Steigungen als 10%) experimentiert habt.

2 Chi-Quadrat Test (mit 5 bzw. 2 Freiheitsgraden)
Prüft mit dem Chi-Quadrat- Test, ob man folgende Hypothesen auf dem 5% Signifikanzniveau bezweifeln darf
- Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich bei einer Neigung von 10% nicht, weil die Haarklemme nirgendwo ins Rutschen kommt. Es bleibt bei 1/6 für jedes der sechs Felder.
- Bergauf und bergab gleichen sich aus, deswegen kommen die Felderpaare (1-6), (2-3) (4-5) gleich wahrscheinlich, also je mit Wahrscheinlichkeit 1/3 vor.

3 Konfidenzintervalle
bestimmt das 95% Konfidenzintervall der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Glücksrad
- oben (auf 1-2-3) anhält
- links (auf 2-4)
- auf einem der Felderpaare i) 1-2, ii) 3-4, iii) 1-6 anhält.

Hinweis:
für die Rechnungen in Aufgabe 1 kannst du Signifikanztesttool.ggb nutzen,
für Aufgabe 3 prognose-konfidenzintervall-tool.ggb.