

# Das »eiernde« Glücksrad – ein Sprungbrett in die Statistik

Spannende Fragen und überraschende Antworten von Klasse 6 bis zum Abitur

WOLFGANG RIEMER

Rotationssymmetrische Glücksräder liefern Laplace-Wahrscheinlichkeiten. Unsymmetrische, die auf einer schiefen Ebene rotieren, laden zum Spekulieren ein – und zum Stellen von Fragen, die man mit beschreibender und beurteilender Statistik untersuchen kann. Dass es gelingt, sie ansatzweise auch physikalisch zu beantworten, ist im wahrsten Sinne des Wortes ein Glücksfall.

## 1 Glücksräder

Glücksräder findet man in Schulbüchern dort, wo es um Laplace-Wahrscheinlichkeiten geht. Man nutzt sie zur Einkleidung innermathematischer Aufgaben zu Pfad- und Summenregel. Man experimentiert kaum noch mit ihnen, denn

- *Münzen und Würfel sind handlicher*, wenn man jenseits von Übungsaufgaben den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten (Modellebene) und relativen Häufigkeiten (Realitätsebene) experimentell erkunden möchte. Und im Gegensatz zu Glücksrädern kann man mehrere Münzen und Würfel gleichzeitig werfen. Das ist zeitökonomisch.
- *Computersimulationen sind noch zeitökonomischer*, wenn man die Stabilisierung relativer Häufigkeiten mit wachsendem Versuchsumfang untersuchen und insbesondere das  $1/\sqrt{n}$ -Gesetz bestätigen möchte. Letzteres besagt: eine Vervierfachung des Versuchsumfangs halbiert die Schwankungen der relativen Häufigkeiten – und dass die relative Häufigkeit für Wappen fast immer (ca. 95 % sicher) im Intervall  $[0,5 - 1/\sqrt{n}; 0,5 + 1/\sqrt{n}]$  liegt.



Abb. 1a. Eine homogene Kreisscheibe rotiert über farbigem Untergrund. Glücksrad aus der Mini-Wahrscheinlichkeitsbox, KLETT, 1980



Abb. 1b. Unkonventioneller Einsatz eines Schulbuchs. Man kann die Spielsteine auch zwischen die Buchdeckel klemmen, damit nichts verrutscht – und ein Heft unterlegen, wenn man Buchdeckel nicht anpieksen möchte.

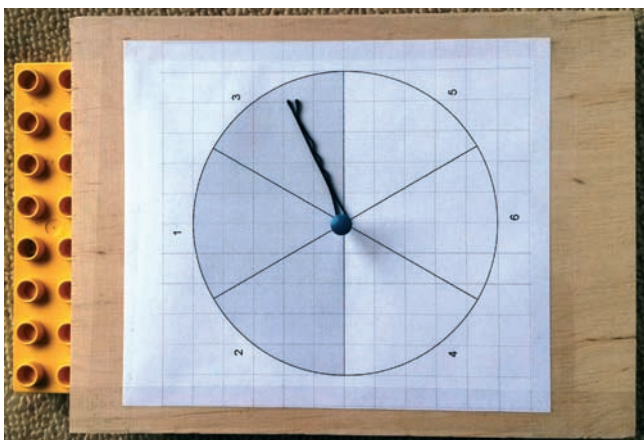


Abb. 2. Holzbrettchen statt Mathebuch. Die Summe der Zahlen auf gegenüberliegenden Sektoren des Sechserglücksrades beträgt 7.

Diese Aussage eignet sich ausgezeichnet zum Einstieg in die beurteilende Statistik (vgl. Abschnitt 4 unten).

Kommerzielle Glücksräder wie in Abbildung 1a sind damit praktisch überflüssig.

Das ändert sich schlagartig, wenn man – wie in Abbildung 1b statt einer homogenen Kreisscheibe einen Zeiger durch Anschneiden um einen Pin rotieren lässt und das entstehende Glücksrad durch Unterlegen von Spielsteinen in eine schiefe Ebene verwandelt, so dass 1 oben, 6 unten liegt (Kopier- und Auswertungsvorlagen bei [www.riemer-koeln.de](http://www.riemer-koeln.de)).

Es gibt viele Fragen, die sich bei diesem Zufallsobjekt von selbst stellen. Sie zielen »ins Herz« der (beschreibenden wie auch der beurteilenden) Statistik:

- (1) Ab welcher Neigung
  - macht sich das Schiefstellen des Glücksrades bei den Wahrscheinlichkeiten bemerkbar?

- lassen sich Abweichungen von der Gleichverteilung »sicher« signifikant nachweisen, wenn man 120 (oder 600) Versuche macht?

(2) Wie groß sind die Chancen der sechs Augenzahlen nach dem Schiefstellen des Glücksrades durch Unterlegen von 1, 2, 3 ... Spielsteinen unter Sektor 1?

Dass die Beschäftigung mit diesem Objekt die Bildung des *hypothetisch-prognostischen* Wahrscheinlichkeitsbegriffs ab Klassenstufe 7 ähnlich nachhaltig fördern kann wie das Würfeln mit Quadern, Schraubenmuttern oder anderen Gegenständen macht schief gestellte Glücksräder auch zur Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff sehr nützlich (RIEMER, 2017).

## 2 Hypothesen

Typische Antworten auf die Frage (2) sehen ab Klasse 7 – sobald Schüler über den Prozentbegriff verfügen – aus wie die Spalten in Abbildung 3. Die geschätzten Chancen sind nichts anderes als (subjektive) Wahrscheinlichkeiten, die Kinder – meist bereitwillig – VOR jedem Experiment formulieren können. Sie gehören in die Modellebene. Wir nennen sie *Hypothesen*, weil man sie (genau wie später in der beurteilenden Statistik) durch Experimente überprüfen kann (vgl. RIEMER, 1991, S. 20 f und LAAKMANN & SCHNELL, 2015, S. 5 f).

Janina bringt die Vermutung in ihren Worten wie folgt auf den Punkt:

- »die Wahrscheinlichkeit rutscht nach unten«
- »rechts und links ist es gleich«.

Wenn man Kinder anregt, nach Argumenten zu suchen, die gegen diese Hypothesen sprechen könnten, werden auch Zweifel geäußert: Möglicherweise

- (3) hängen die Chancen von der Drehrichtung ab,
- (4) bleibt der Zeiger bergauf (2; 4) eher stehen als bergab (3; 5),
- (5) hängt die Wahrscheinlichkeit von der Schnipptechnik und der Startposition ab,

ein Stein (Steigung ca. 10 %)      zwei Steine (ca. 20 %)      drei Steine (ca. 30 %)

	ein Stein (Steigung ca. 10 %)			zwei Steine (ca. 20 %)			drei Steine (ca. 30 %)		
	Janina	Julian	Vera	Janina	Julian	Vera	Janina	Julian	Vera
1	11.5%	10.0%	10.0%	7.0%	5.0%	8.0%	5.0%	2.0%	5.0%
2	15.0%	12.5%	16.0%	14.0%	10.0%	15.0%	13.0%	4.0%	7.5%
3	15.0%	12.5%	16.0%	14.0%	10.0%	15.0%	13.0%	4.0%	7.5%
4	19.3%	20.0%	19.0%	20.0%	22.5%	20.0%	21.0%	25.0%	25.0%
5	19.3%	20.0%	19.0%	20.0%	22.5%	20.0%	21.0%	25.0%	25.0%
6	20.0%	25.0%	20.0%	25.0%	30.0%	22.0%	27.0%	40.0%	30.0%

Abb. 3. Hypothesen über die Wahrscheinlichkeit der Sektoren von Glücksrädern, bei denen der Sektor 1 durch Unterlegen mehrerer Steine höher liegt als der Sektor 6.

	1 Stein						600	2 Steine						600	3 Steine						600
1	22%	21%	15%	16%	25%	20%	18%	15%	18%	17%	14%	17%	16%	20%	23%	25%	22%	21%			
2	10%	16%	17%	14%	16%	15%	8%	10%	17%	18%	14%	13%	13%	13%	14%	16%	15%	14%			
3	16%	18%	9%	14%	17%	15%	13%	12%	13%	17%	17%	14%	23%	19%	11%	18%	12%	17%			
4	13%	18%	18%	16%	20%	17%	20%	11%	18%	22%	15%	17%	13%	15%	18%	8%	23%	16%			
5	22%	13%	18%	18%	15%	17%	25%	22%	17%	10%	19%	19%	18%	20%	15%	18%	15%	17%			
6	18%	15%	23%	23%	8%	17%	16%	31%	18%	17%	21%	21%	18%	13%	19%	15%	14%	16%			
t	7.7	2.4	7.7	3.5	12.1	6.6	12.9	23.9	1.7	5.2	2.8	12.8	4.8	4.3	6.2	10.5	6.9	10.0			
h(oben)	0.5	0.5	0.4	0.4	0.6	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.4	0.5	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5			

Abb. 4. Die Spalten enthalten die relativen Häufigkeiten der sechs Glücksrad-Sektoren nach je 120 Versuchen. Die umrahmten Spalten zeigen die Zusammenfassung zu je 600 Versuchen. Die Zeile *t* zeigt den Wert der Chi-Quadrat-Testgröße (Anpassungstest auf Gleichverteilung), wobei kritische Werte  $t > 11,1$ , die Zweifel an der Gleichverteilung signalisieren, unterlegt sind. Die letzte Zeile *h*(oben) zeigt die relative Häufigkeit, mit der die obere Hälfte des Glücksrades (Sektoren 1, 2, 3) getroffen wurde. Auch hier sind signifikante Abweichungen von  $p = 0,5$  farbig markiert. Näheres dazu in den Abschnitten 4 und 5.

(6) hängt die Wahrscheinlichkeit vom Untergrund und der verwendeten Nadel ab.

### 3 Experimentieren

Die Spannung, mit der nach der Phase des Spekulierens die Versuchsergebnisse erwartet werden, lässt sich durch Worte schwer beschreiben, man muss sie im Klassenraum erleben!

#### 3.1 Dokumentenhülle – Sicherheitsnadel – Rechts-/Linksrotation

Abbildung 4 zeigt die überraschenden Ergebnisse von drei Fünfergruppen aus einer Klasse 7:

Das Neigen des Glücksrades durch Unterlegen von 1, 2, 3 Steinen beeinflusst die Wahrscheinlichkeiten nicht!

Versuchsbedingungen: Dabei kamen die Glücksräder aus Abbildung 1b mit Sicherheitsnadeln auf Dokumentenhüllen zum Einsatz. Die Hüllen hatten eine merkliche Textur, so dass die Nadel auch bei 30 % Neigung stets dort liegen blieb, wo sie zum Stillstand gekommen war. Sie rutschte also nach Stillstand nicht nach unten. Jeder schnippte 120-mal von »6« aus – abwechselnd nach rechts und links. Das Ergebnis zählte nur, wenn die Nadel mindestens zwei Vollumdrehungen absolviert hatte. Zwei Kontrollgruppen, die nach einer kurzen Übungsphase versuchten, die Nadel durch »Zielschnippen« (gemäß Fragestellung 5) auf dem Sektor »1« also »oben« zu landen, hatten mit ihren Bemühungen keinen Erfolg.

#### 3.2 Zeichenkarton rechtsherum

Wenn man genau hinschaut (Abb. 1b), können sich Dokumentenhüllen wellen und Buchdeckel biegen sich beim Schnippen der Nadel mitunter ein wenig.

Eine Klasse 8 schnippte deswegen Glücksräder aus plan liegendem Zeichenkarton auf Sperrholzplatten (Abb. 3) stets rechtsherum mit Startsektor 6. Abbildung 5 zeigt wiederum Überraschendes.

Das Glücksrad hält den Spekulationen (3) und (4) entsprechend tatsächlich häufiger auf den links liegenden Sektoren 2 und 4 (bergauf) als bei den rechts liegenden 3 und 5 (bergab) und

- der »Überschuss« an 2<sup>em</sup> scheint den »Mangel« an 3<sup>em</sup>,
- der »Überschuss« an 4<sup>em</sup> den »Mangel« an 5<sup>em</sup> auszugleichen.

Nach diesen Beobachtungen wird man im Sinne eines Modellierungskreislaufs die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines geeigneten Glücksrades so ansetzen, dass gilt

- $p(6) = p(1) = 1/6$
- $p(2) = p(4) = 1/6 + d$
- $p(3) = p(5) = 1/6 - d$ ,  
also  $p(2) + p(3) = 1/3$  und  $p(4) + p(5) = 1/3$

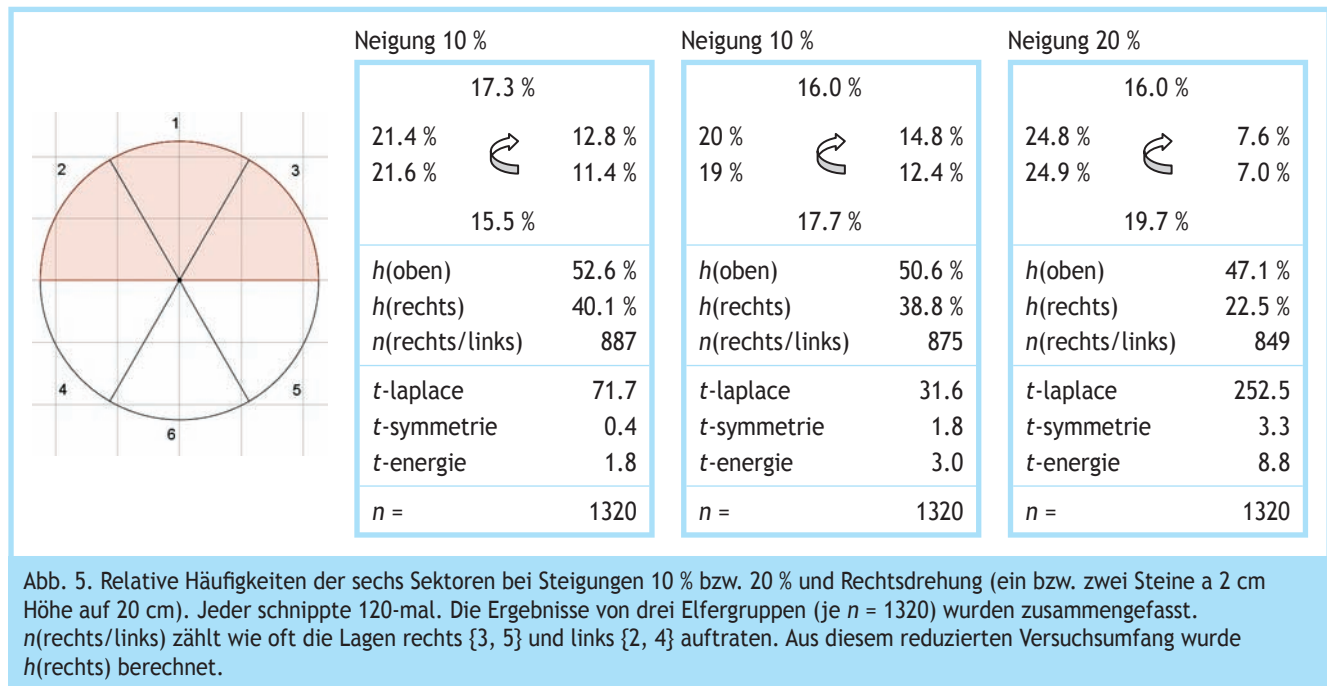
wobei die »Abweichung«  $d > 0$  von der Gleichverteilung mit zunehmender Neigung des Glücksrades wächst. Und tatsächlich verträgt sich das sehr gut mit der Beobachtung einer Gleichverteilung bei gleichmäßigem Schnippen in beide Richtungen.

### 4 Beurteilende Statistik

Die Hypothesen aus Abschnitt 2 sind in der Sekundarstufe II authentische Sprungbretter in die beurteilende Statistik, da sie eigenen Spekulationen entstammen und mit dem einfachsten Werkzeug der beurteilenden Statistik, dem  $1/\sqrt{n}$ -Gesetz, überprüfbar sind: Wenn die relative Häufigkeit für Kopf bei einer Münze außerhalb des Intervalls  $[0,5 - 1/\sqrt{n}; 0,5 + 1/\sqrt{n}]$  liegt, hat man Grund, die Fairness der Münze zu bezweifeln.

Auf das Glücksrad übertragen bedeutet das: Wenn die Neigung die Wahrscheinlichkeiten nicht beeinflussen würde, dann müsste die relative Häufigkeit der Lage »oben«  $\{1; 2; 3\}$  bei 100 Versuchen fast immer in  $[0,4; 0,6]$  und bei 1320 Versuchen fast immer in  $[0,472; 0,528]$  liegen.

Man hat also auch durch die Brille der beurteilenden Statistik gesehen keinen Grund, bei 10 % Steigung an der Gleichwahrscheinlichkeit der Lagen »oben« und »unten« zu zweifeln. Bei



20 % beginnen leichte Zweifel aufzukommen, da die relative Häufigkeit für »oben« am Rand des  $1/\sqrt{n}$ -Intervalls liegt. Eine entsprechende Überlegung begründet bei konstanter Drehrichtung massive Zweifel an der Gleichwahrscheinlichkeit der Lagen »bergauf {2; 4}« und »bergab {3; 5}«.

Für ein Verständnis der grundlegenden »Philosophie« des Hypothesentests – insbesondere auf Grundkursniveau – ist das Argumentieren mit dem  $1/\sqrt{n}$ -Gesetz wegen seiner Griffigkeit erhellend und absolut ausreichend. Es fokussiert auf einen Kerngedanken der beurteilenden Statistik, ohne sich in Spitzfindigkeiten einseitiger Tests mit konstruierten Alternativhypothesen oder Rechnungen zu verlieren. Erst wenn diese Argumentation internalisiert ist, sollte man sich auf einseitige Hypothesentests, möglicherweise auch mit verschiedenen Signifikanzniveaus, einlassen – dies jedoch ggf. weniger aus inhaltlichen Gründen, sondern eher um Schüler auf zentrale Prüfungen vorzubereiten.

### 5 Anpassungstest

Wenn man prüfen möchte, ob eine absolute Häufigkeitsverteilung  $h_1, \dots, h_k$  Anlass gibt, eine Hypothese mit  $k$  Wahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_k$  zu bezweifeln, verwendet man die Chi-Quadrat-Testgröße

$$t = \sum_{i=1}^k \frac{(h_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \quad (*)$$

(Abb. 5 zeigt die Werte  $t$ -laplace ( $k = 6$ ),  $t$ -symmetrie ( $k = 3$ ) und  $t$ -energie ( $k = 4$ ), die diese Testgröße annimmt, wenn man Sektoren des Glücksrades wie unten erläutert zusammenfasst.)

Falls die Hypothese stimmt, liegt der Wert von  $t$  fast immer (mit ca. 95 % Sicherheit)

- unter 11,1 für  $k = 6$ ,
- unter 7,8 für  $k = 4$ ,
- unter 6,0 für  $k = 3$ .

Das kann man mit Simulationen leicht bestätigen – und mit dem zentralen Grenzwertsatz auch begründen. Falls sich in einem Experiment höhere Werte ergeben, sind Zweifel an der Hypothese gerechtfertigt.

Damit prüft man die in 3.2 aufgestellten Vermutungen statistisch wie folgt:

#### 5.1 Test auf Gleichwahrscheinlichkeit aller sechs Sektoren ( $t$ -laplace, $k = 6$ )

Wenn alle sechs Sektoren die gleiche Wahrscheinlichkeit  $1/6$  besäßen, müsste bei  $n$  Versuchen die Testgröße

$$t = \frac{1}{n/6} \sum_{i=1}^6 (h_i - n/6)^2$$

fast immer unter 11,1 liegen.

Das ist bei zweiseitigem Drehen (Abb. 4) sowohl bei dem Stichprobenumfang  $n = 120$  wie auch den Zusammenfassungen ( $n = 600$ ) die Regel. Der Test gibt damit (bei Verwendung einer texturierten Dokumentenhülle) keinen Anlass, an der Gleichverteilung zu zweifeln. Bei einseitigem Drehen ergeben sich dagegen mit den Testgrößen aus der Zeile » $t$ -laplace« von Abbildung 5 starke Zweifel: Bergauf bleibt man deutlich wahrscheinlicher stecken als bergab.

5.2 Test auf Gleichwahrscheinlichkeit der Sektorenpaare {1; 6}, {2; 3}, {4; 5} (t-symmetrie, k = 3)

Durch Zusammenfassen »symmetrisch« zueinander liegender Sektoren {1; 6}, {2; 3}, {4; 5} zu k = 3 Paaren müsste sich nach 3.2 (und auch der Theorie aus 5) aber auch bei einseitigem Drehen für diese Pärchen eine Gleichverteilung mit p = 1/3 ergeben. Tatsächlich liegen die entsprechenden Testwerte »t-symmetrie« in Abbildung 5 trotz des hohen Stichprobenumfangs n = 1320 unterhalb der für k = 3 kritischen Grenze 6. Man hat damit auch bei einseitigem Drehen keinen Grund, an der Hypothese p(2; 3) = p(4; 5) = p(1; 6) = 1/3 zu zweifeln.

5.3 Test des Energiemodells (t-energie, k = 4)

Man kann aber auch auf das Zusammenfassen von p<sub>1</sub> und p<sub>6</sub> verzichten und mit (\*) und k = 4 die Hypothese

$$p(1) = 1/6, p(2; 3) = 1/3, p(4; 5) = 1/3, p(6) = 1/6 \quad (**)$$

prüfen. Wie die Zeile t-energie in Abb. 5 zeigt, besteht bei der Steigung 10 % kein Grund zum Zweifel an dieser Hypothese (\*\*), denn alle Testwerte liegen trotz des hohen Stichprobenumfangs unter der kritischen Grenze 7,8. Bei 20 % Steigung beginnen sich Zweifel zu hegen. Allerdings arbeitet man bei dieser Neigung auch schon an der Grenze der Haftreibung.

6 Theorie

Überraschenderweise lassen sich die Entdeckungen zur Struktur der Wahrscheinlichkeiten geneigter Glücksräder auch theoretisch begründen. Es reichen Energiebetrachtungen der Mittelstufenphysik.

6.1 Haftreibung – Gleitreibung

Wenn man einen Gegenstand, der dank Schwerkraft auf der Unterlage haftet, in Bewegung versetzen will, muss man die Haftreibung überwinden. Um die Bewegung anschließend aufrecht zu halten, muss man eine kleinere Kraft einwirken lassen, die die Gleitreibung übertrifft. Die Gleitreibung gilt als geschwindigkeitsunabhängig. Wer schon einmal einen beladenen Schlitten im Schnee gezogen hat, dem ist die Bedeutung dieser Aussage klar.

6.2 Horizontales Glücksrad

Wenn ein Glücksrad auf horizontaler Unterlage rotiert, nimmt wegen dieser konstanten Gleitreibung die Bewegungsenergie E<sub>kin</sub> linear mit dem zurückgelegten Weg s ab.

Der Einfachheit halber modellieren wir den Zeiger des Glücksrades durch seinen Schwerpunkt, der auf dem Einheitskreis rotiert und bei s = 0 (unten in der Mitte des Sektors 6) startet. Wenn E<sub>0</sub> die Start-

energie beim Anschnippen ist, gilt E<sub>kin</sub> = E<sub>0</sub> - k · s. Der Zeiger bleibt bei s = (E<sub>0</sub> - E<sub>kin</sub>)/k stehen. Dort ist durch die konstante Gleitreibung die Startenergie »aufgebraucht« (d. h. durch Dissipation in Wärmeenergie umgewandelt). Mit jeder Umdrehung des Zeigers reduziert sich die kinetische Energie um 2π · k. Jeder überstrichene Sektor »schluckt« die gleiche Energie (π/3) · k.

6.3 Neigung

Bei Neigung des Glücksrades hat der Zeiger bei s = π (oben in der Mitte des Sektors 1) seine maximale Lageenergie E<sub>pot</sub>. Die Lageenergie nach der Wegstrecke s ist dann

$$\frac{1}{2} E_{pot} \cdot (1 - \cos(s)),$$

sie verschwindet bei s = 0; 2π; 4π; 6π; ..., also immer, wenn der Zeiger unten vorbeikommt. Sie wird maximal bei s = π; 3π; 5π; ..., wenn der Zeiger oben vorbeikommt. Da die Zunahme der Lageenergie jeweils durch Abnahme der kinetischen Energie »aufgebracht« werden muss, gilt allgemein (vgl. Abb. 6):

$$E_{kin}(s) = E_0 - k \cdot s - \frac{1}{2} E_{pot} \cdot (1 - \cos(s)).$$

6.4 Die Sektoren »fressen« Bewegungsenergie

Wie beim horizontalen Glücksrad in 5.2 absorbiert (»frisst«) dann jede Vollumdrehung die kinetische Energie 2π · k.

Beim Passieren der Sektoren 4 (unten links) bzw. 5 (unten rechts) nimmt sie ab um

$$E_{kin}\left(\frac{\pi}{6}\right) - E_{kin}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}k + \frac{\sqrt{3}}{4}E_{pot} \text{ bzw.}$$

$$E_{kin}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - E_{kin}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}k - \frac{\sqrt{3}}{4}E_{pot}.$$

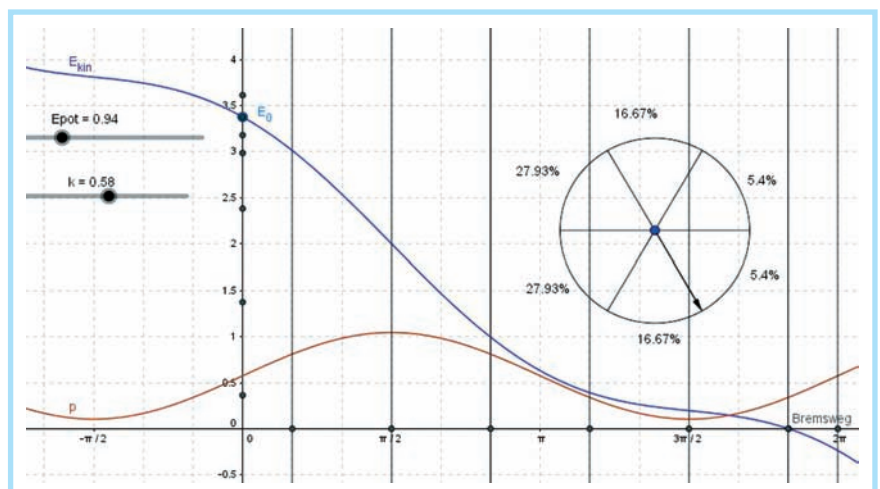


Abb. 6. Verlauf der kinetische Energie E<sub>kin</sub>(s) des Zeigers in der letzten Runde (0 < s < 2π), bevor er hier bei 11/6 π (d. h. am Anfang des Sektors 6) stehen bleibt. Auf der Hochachse sind die Energiewerte durch Punkte markiert, die in der letzten Runde benötigt werden, damit der Zeiger es noch schafft bis zum Ende des Sektors 6 bei s = π/6, des Sektors 4 bei s = 3π/6, ... Der rote Funktionsgraph zu p(s) = -E<sub>kin</sub>'(s) lässt sich als Wahrscheinlichkeitsdichte deuten. Man muss dazu nur noch normieren, indem man durch 2πk dividiert.

Die gleichen Energien werden von den Sektoren 2 (oben links) und 3 (oben rechts) absorbiert. In den Sektoren 6 (unten) und 1 (oben) nimmt die kinetische Energie jeweils um  $\frac{\pi}{3}k$  ab, genau wie beim horizontalen Glücksrad.

Wenn man sich in die Sektoren hineinversetzt und nach dem Motto argumentiert: »je mehr Energie ich von dir, lieber Zeiger, einfange, desto eher bleibst Du bei mir stehen« (Proportionalität zwischen Wahrscheinlichkeit und absorbierter Energie), ergibt sich also tatsächlich die Struktur der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus 3.2 mit

$$d = \frac{\sqrt{3}}{4} E_{\text{pot}} / \frac{\pi}{3} k = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{E_{\text{pot}}}{k}.$$

Diese Argumentation macht aber nur für den Fall Sinn, dass die Gleitreibung (deutlich) höher ist als die Kraft, mit der der Zeiger bei Neigung der Unterlage durch die Schwerkraft (Hangabtriebskraft) nach unten gezogen wird. Kurz: Der Zeiger muss überall stehen bleiben können, er darf nicht nach Stillstand zurückrutschen. In der Sprache der Analysis muss  $E_{\text{kin}}(s)$  monoton fallen. Praktisch darf man das Glücksrad also nicht zu stark neigen und die Gleitfläche darf nicht zu glatt sein.

## 7 Resümee

Ein Glücksrad, dessen Zeiger auf einer schiefen Ebene rotiert, regt ab Klasse 7 an, über Wahrscheinlichkeiten zu diskutieren und Hypothesen aufzustellen.

Der »gesunde Menschenverstand« suggeriert nämlich, dass durch Neigen eines Glücksrades höher liegende Sektoren unwahrscheinlicher werden. Diese Vorstellung entspricht der

Erfahrung, dass bei einer frei ausrollenden Fahrradfelge das Ventil stets unten zu liegen kommt.

Tatsächlich bleibt der Zeiger *bei hinreichend hoher Gleitreibung* aber »auf jeder Höhe« mit gleicher Wahrscheinlichkeit stehen. Das lässt sich mit einfachen Energiebetrachtungen physikalisch begründen: Ein »bergauf überstrichener« Sektor »fängt« den Zeiger des Glücksrades wegen zunehmender Lageenergie etwas wahrscheinlicher als ein horizontal liegender. Der symmetrisch dazu liegende »bergab überstrichene« Sektor »fängt« den Zeiger um den gleichen Betrag weniger wahrscheinlich. Beide Effekte gleichen sich aus.

Bei der statistischen Prüfung dieser Aussagen können Testverfahren der beurteilenden Statistik zielführend zum Einsatz kommen.

## Literatur

RIEMER, W. (2017). Grundvorstellungen beurteilender Statistik fördern. Wahrscheinlichkeiten als Modelle, Simulationen und das Konzept des Bezweifeln. Erscheint in: G. GREEFRATH, S. SILLER (Hrsg.), *Simulation im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Springer Verlag.

RIEMER, W. (1991). *Stochastische Probleme aus elementarer Sicht*. Mannheim: B. I. – Wissenschaftsverlag.

LAAKMANN, H. – SCHELL, S. (2015). Mit Zufall durch die Schule – Wahrscheinlichkeit. *Praxis der Mathematik*, 66, Themenheft.

Dr. WOLFGANG RIEMER, August-Bebel-Str. 80, 50259 Pulheim, w.riemer@arcor.de, www.riemer-koeln.de, arbeitet als Fachleiter am Studienseminar in Köln, ist Gründungsmitglied des Geogebra-Instituts Köln/Bonn und Archimedes-Preisträger. ■